बी.टी.सी. (चतुर्थ) पाठ्यक्रमानुसार

(बेसिक टीचर सर्टीफिकेट)

सेवापूर्व शिक्षक प्रशिक्षुओं के लिए पाठ्यपुस्तक

गणित

चतुर्थ सेमेस्टर

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्,
उ.प्र., लखनऊ
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद

संरक्षक – श्री हीरा लाल गुप्ता-आई.ए.एस, सचिव बेसिक शिक्षा, उ.प्र. शासन लखनऊ

परामर्श – श्रीमती शीतला वर्मा-आई.ए.एस., राज्य परियोजना निदेशक, उ.प्र. सभी के लिए शिक्षा परियोजना परिषद्, लखनऊ

निर्देशक – श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह, निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, उ.प्र. लखनऊ

समन्वयक – श्रीमती नीना श्रीवास्तव, निदेशक राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र. इलाहाबाद

लेखक – श्रीमती रागिनी श्रीवास्तव, श्रीमती मंजूषा गुप्ता, श्री कैलाश बाबू तथा श्री भीम।

कम्प्यूटर ले आउट-कॉमर्शियल प्रेस, इलाहाबाद

प्राक्कथन

समय-समय पर सामाजिक बदलाव और उसके अनुरूप आवश्यकताओं को ध्यान में रखते हुए शिक्षा-प्रणाली तथा पाठ्यक्रमों में भी संशोधन एवं युगानुरूप परिवर्तन करने की आवश्यकता शिक्षा-विदों द्वारा अनुभव किया जाना एक स्वाभाविक प्रक्रिया है। इसी के अन्तर्गत राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा शिक्षक-शिक्षा की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2009 के आलोक में उत्तर प्रदेश में प्राथमिक कक्षाओं के शिक्षकों हेतु सेवापूर्व प्रशिक्षण की केन्द्र पुरोनिधानित शिक्षक-शिक्षा योजना लागू की गयी है। इसके अन्तर्गत बी.टी.सी. के दो वर्षीय पाठ्यचर्या का पुनरीक्षण कर समावेशी विभिन्न विषयों के पाठ्यक्रमों को समुन्नत किया गया है तथा प्रशिक्षु शिक्षकों से यह अपेक्षा की गयी है कि वे बिना किसी भय के शिक्षार्थियों के ज्ञानार्जन में उनकी सहायता कर सकें। नवीन पाठ्यचर्या एवं पाठ्यक्रमों के सन्निहित उद्देश्यों को दृष्टिगत कर राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद द्वारा विज्ञान एवं गणित विषयों की पाठ्य-पुस्तकों का सृजन किया गया है।

पाठ्यपुस्तकों की संरचना करते समय इस बात को विशेष महत्त्व देते हुए भरपूर प्रयास किया गया है कि प्रशिक्षित शिक्षक की ओजभरी वाणी में इतना आकर्षण एवं शक्ति हो कि वह शिक्षाग्रहण करने वाले प्रशिक्षणार्थियों के मन की समस्त दुविधाओं को दूर कर उनकी बुद्धि का पूरा लाभ उन्हें प्रदान कर सके तथा वह गुरुजनों को अपने माता-पिता के समान अपना सच्चा मार्गदर्शक समझकर उनके द्वारा प्रदत्त ज्ञान को प्राप्त कर सके।

विज्ञान और गणित विषय ही समाज को मानव जीवन को जीवन्त बनाने, उसे सब प्रकार के भौतिक सुखों से आप्लावित करने, भविष्य की सुखदयोजनाओं की संकल्पना करने, उसका ब्लू-प्रिन्ट तैयार कर उसे कार्यान्वित करने का सार्थक स्वप्न दिखाते हैं। इन स्वप्नों को साकार करने के बीज जब प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर बच्चों के उर्वर मन में बो दिया जाता है तथा शिक्षक की वाणी की ज्ञान गंगा जब उन्हें निरन्तर सींचती रहती है, तो उसी में से एक दिन रमन, जगदीश चन्द्रबोस जैसे महान वैज्ञानिक तथा रामानुजन, शकुन्तला जैसे महान गणितज्ञ पैदा होते हैं। यह मानकर चलिए कि हमारे विद्या मन्दिर के प्रत्येक बालक-बालिका के उर में एक वैज्ञानिक, एक गणितज्ञ सोया हुआ है, बस आवश्यकता है कि उसे कैसे जगायें, कैसे ऊर्जा स्थित करें और कैसे सृजनात्मकता के पाठ पढाये और कैसे उसे ज्ञान, बोध, अनुप्रयोग और कौशल के सारे गुर सिखायें कि वह आगे चलकर अपनी अद्‌भुत प्रतिभा से राष्ट्र को समुन्नत करने का बीड़ा उठा सके।

सीमित समयान्तर्गत गणित विषय की पाठ्यपुस्तक को आकर्षक कलेवर प्रदान करने में हमें श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, उत्तर प्रदेश, लखनऊ का समय-समय पर जो अत्यन्त उपयोगी मार्ग दर्शन प्राप्त हुआ है, उसके लिए मैं उनके प्रति हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करती हूँ। पाठ्य-पुस्तक के प्रणयन में लेखक मण्डल के सभी सदस्यों के अमूल्य सहयोग के लिए भी मैं उनके प्रति अपना आभार व्यक्त करती हूँ। शिक्षाविद् परामर्शदाताओं के सतत सहयोग से इस पाठ्यपुस्तक को निखारने में हमें जो सहयोग मिला है, उसके लिए भी मैं उन्हें धन्यवाद देती हूँ। मैं अपने संस्थान के सभी विद्वान सहयोगियों को भी हृदय से धन्यवाद देती हूँ जिनके अहर्निश परिश्रम के बल पर ही यह पाठ्यपुस्तक अन्तिम स्वरूप को ग्रहण कर सकी है।

सुधार और संशोधन की कोई सीमा नहीं होती है। मैं शिक्षा जगत के सभी सुधीजनों से अपेक्षा करती हूँ कि वे अपने सकारात्मक सुझावों से हमें अवश्य अवगत करायेंगे जिससे पाठ्य पुस्तक के अगले संस्करण को और अधिक ऊर्जावान एवं सार्थक बनाया जा सके।

श्रीमती नीना श्रीवास्तव
निदेशक
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद

विषय-सूची

इकाई-1

करणी, करणीगत राशि करणी चिन्ह तथा करणी का घातांक

ऐसी संख्याएँ जिनका वर्गमूल, घनमूल, चतुर्थमूल, पाँचवाँ मूल .... nवाँ मूल जो प्राकृतिक संख्या या परिमेय संख्या नहीं होतीं, वे सभी करणी संख्याएँ कहलाती हैं। ऐसी संख्याओं को मूलसूचक चिन्ह '$\sqrt[n]{\ }$' का प्रयोग कर प्रदर्शित करते हैं, जहाँ $n = 2, 3, 4,$ .... क्रमशः वर्गमूल, घनमूल, चतुर्थमूल .... को निर्दिष्ट करते हैं।

व्यापक रूप में संख्या $\sqrt[n]{x}$ एक करणी संख्या है जिसमें x करणीगतराशि, n करणी का घातांक कहलाते हैं तथा '$\sqrt{n}$' करणीचिन्ह है।

इसे इस प्रकार समझा जा सकता है—

$\sqrt[3]{125}$ को आधार (125) के घातीय संकेतन में व्यक्त कीजिए।

$\left(\frac{216}{343}\right)^{1/3}$ को घनमूल संकेतन में लिखें।

$\sqrt[3]{-512}$ को आधार (-512) के घात रूप में व्यक्त कीजिए।

व्यापक रूप में व्यक्त करने पर,

$$a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots n \text{ बार } = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots n \text{ बार}}$$

$$= a^1 = a$$

अतः $a^{\frac{1}{n}}$ को n बार लेकर आपस में गुणा करने पर संख्या a प्राप्त होती है। उपर्युक्त से,

$$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$$

अतः $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

जिस प्रकार $\sqrt{a}$ को a का वर्गमूल, $\sqrt[3]{a}$ को a का घनमूल कहते हैं, उसी प्रकार $\sqrt[4]{a}$ को a का चतुर्थमूल, $\sqrt[5]{a}$ को a का पाँचवा मूल, $\sqrt[6]{a}$ को a का छठाँ मूल, ..., तथा $\sqrt[n]{a}$ को n वाँ मूल कहते हैं।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए, n वाँ मूल के चिन्ह $\sqrt[n]{\ }$, या $(\ )^{\frac{1}{n}}$ में $n = 2$ लेने पर वर्गमूल, $n = 3$ लेने पर घनमूल, $n = 4$ लेने पर चतुर्थमूल, ... के लिए चिह्न या संकेतन प्राप्त हो जाते हैं। देखिए,

$$\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = (5^{\frac{1}{3}})^3 = 5^{\frac{1}{3} \times 3} = 5^1 = 5$$

अतः $\sqrt[3]{5}$ का घन $= 5$, जो पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या नहीं है। अतः 5 का घनमूल $\sqrt[3]{5}$ प्राकृतिक संख्या नहीं है।

इसी प्रकार,

$$\sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{6} = \left(\sqrt[3]{6}\right)^3 = (6^{\frac{1}{3}})^3 = 6^{\frac{1}{3} \times 3} = 6^1 = 6$$

अतः $\sqrt[3]{6}$ का घन $= 6$, जो पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या नहीं है। अतः 6 का घनमूल $\sqrt[3]{6}$ प्राकृतिक संख्या नहीं है।

पुनः देखिए,

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \times \sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)^3 = \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{3} \times 3} = \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

जो पूर्ण घन परिमेय संख्या नहीं है।

अर्थात् $\frac{2}{3}$ का घनमूल $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ परिमेय संख्या नहीं है।

इसी प्रकार दर्शाइए कि 9, 10, 11, 12, $\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}$ के घनमूल प्राकृतिक अथवा परिमेय संख्याएँ नहीं हैं।

इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि :

जो संख्याएँ पूर्णघन प्राकृतिक संख्या अथवा परिमेय संख्या नहीं होतीं, उनके घनमूल भी प्राकृतिक संख्या अथवा परिमेय संख्या नहीं होते हैं। ऐसी घनमूल संख्याएँ करणी होती हैं।

इस प्रकार $\sqrt{2}, \sqrt{3}, ..., \sqrt{7}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{9} ..., \sqrt[4]{8}, \sqrt[4]{9}, ... \sqrt[5]{16}, \sqrt[5]{81}, ...$ आदि करणियाँ हैं किन्तु $\sqrt{4}, \sqrt{9}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{\frac{27}{64}}, \sqrt[4]{16}, \sqrt[5]{243}, \sqrt[5]{\frac{32}{3125}} ...$ करणियाँ नहीं हैं क्योंकि ये सभी या तो प्राकृतिक संख्याएँ हैं अथवा परिमेय संख्याएँ, भले ही इन्हें करणी चिह्नों का प्रयोग कर लिखा गया है।

प्रयास कीजिए :

निम्न संख्याओं में से करणी संख्याओं को बताइये :

$\sqrt[3]{64}, \sqrt[3]{81}, \sqrt{12}, \sqrt{16}, \sqrt[3]{128}, \sqrt[3]{125}, \sqrt[3]{216}, \sqrt[3]{256}$

टिप्पणी : वर्गमूल के चिन्ह '$\sqrt{\ }$' में करणी का घातांक अन्तर्निहित है। दृढ़तापूर्वक कहें तो वर्गमूल का वास्तविक संकेतन $\sqrt[2]{\ }$ ही है, किन्तु प्रचलन में इसे केवल $\sqrt{\ }$ लिखा जाता है। वर्गमूल के अतिरिक्त घनमूल, चतुर्थ मूल, पाँचवा मूल,...आदि में करणी का घातांक करणी के चिन्ह के साथ यथास्थान अवश्य लिखिते हैं।

इकाई से सम्बन्धित सामान्य नियम—

करणी—माना a एक परिमेय संख्या है तथा n एक धन पूर्णांक है।

यदि a का n वाँ मूल एक अपरिमेय राशि हो तो $a^{1/n} = \sqrt[n]{an}$ को घात n की करणी कहा जाता है।

उदाहरण :

(i) $\sqrt{3} = 3^{1/2}$, एक द्वितीय घात की करणी है।

(ii) $\sqrt[4]{5} = 5^{1/4}$, एक करणी है जिसकी घात 4 है।

घातांक के नियम :

(i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(ii) $(a^m) \div (a^n) = a^{m-n}$

(iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iv) $(ab)^n = (a^n \times b^n)$

(v) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

(vi) $a^0 = 1$

करणी के नियम :

(i) $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{1/n})^n = a$

(ii) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}$

(iii) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

(iv) $(\sqrt[n]{a})^m =$

(v) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m]{(a)^{\frac{1}{n}}} = \left((a)^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}} = \sqrt[m]{a}$

साधित उदाहरण

1. $(243)^{3/5}$ को सरल कीजिए।

हल : $(243)^{3/5}$

$= (3^5)^{3/5}$

$= 3^{5 \times \frac{3}{5}}$

$= 3^3$

$= 27$

2. $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को आरोही क्रम में लिखिए।

हल : दी गयी करणियों की घात क्रमशः 2, 3, 4 है जिनका ल.स. = 12

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} = (2^6)^{\frac{1}{12}} = (64)^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} = (4^4)^{\frac{1}{12}} = (256)^{\frac{1}{12}}$$ तथा

$$\sqrt[4]{6} = (6)^{1/4} = (6^3)^{\frac{1}{12}} = (216)^{\frac{1}{12}}$$

स्पष्ट है कि $(64)^{\frac{1}{12}} < (216)^{\frac{1}{12}} < (256)^{\frac{1}{12}}$

अतः $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

3. यदि $(\sqrt{3})^5 \times 9^2 = 3^n \times 3\sqrt{3}$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(\sqrt{3})^5 \times (3^2)^2 = 3^n \times 3 \times 3^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \quad (3)^{\left(\frac{5}{2}+4\right)} = (3)^{\left(n+1+\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad (3)^{\frac{13}{2}} = (3)^{\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad n + \frac{3}{2} = \frac{13}{2}$$

$$\Rightarrow \quad n = \left(\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\right) \Rightarrow n = \frac{10}{2} = 5$$

अतः $n = 5$

4. $(.00032)^{0.6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(.00032)^{0.6} = \{(0.2)\}^{\frac{6}{10}}$

$$= (.2)^{5\times\frac{6}{10}}$$
$$= (.2)^3$$
$$= (.2\times.2\times.2)$$
$$= .008$$

मूल्यांकन :

नीचे दिये गये प्रत्येक प्रश्न में ठीक (सही) उत्तर को चिन्हांकित (✓) कीजिए :

1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = ?$

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $2\sqrt{2}$

(c) $-\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}$

2. $(\sqrt{8})^{\frac{1}{3}} = ?$

(a) 2 (b) 4

(c) $\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

3. $\left(\frac{32}{243}\right)^{-4/5} = ?$

(a) $\frac{4}{9}$ (b) $\frac{9}{4}$

(c) $\frac{16}{81}$ (d) $\frac{81}{16}$

4. $\left(-\frac{1}{343}\right)^{-2/3} = ?$

(a) $-\frac{1}{49}$ (b) $\frac{1}{49}$

(c) –49 (d) 49

5. यदि $(27)^{2/3} \times (81)^{1/2} = 3^n$ हो, तो n का मान होगा :

(a) 1 (b) 0

(c) 27 (d) 81

6. व्यंजक $\left(\frac{2^n + 2^{n-1}}{2^{n+1} - 2^n}\right)$ का मान है—

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{3}{2}$

(c) $2^{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)}$ (d) $\frac{2}{3}$

7. व्यंजक $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{(a+b)} . \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{(b+c)} , \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{(c+a)}$ का मान है—

(a) 1 (b) x^{a+b+c}

(c) x^{abc} (d) 0

8. यदि $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ हो, तो $\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}$ का मान क्या होगा?

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $2+\sqrt{3}$ (d) $2-\sqrt{3}$

9. यदि $2^{x-1} + 2^{x+1} = 320$ हो, तो x का मान है—

(a) 6 (b) 8

(c) 5 (d) 7

10. $(0.01024)^{1/5} = ?$

(a) 0.00004 (b) 0.04

(c) 0.4 (d) 4

———

इकाई-2

वर्ग, वर्गमूल, घन, घनमूल की अवधारणा

वर्ग और वर्गमूल :

जब किसी संख्या की घात दो हों तो हम उसे उस संख्या का वर्ग कहते हैं। 2^2 को 2 की घात 2 या 2 का वर्ग कहा जाता है। स्पष्ट है कि 2^2 का अर्थ 2×2 होता है। यदि कोई संख्या दी गयी है तो यह पता करने के लिए कि वह कौन-सी संख्या है जिसका उसी में गुणा करने पर दी गयी संख्या प्राप्त होती है, हमें उस संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। इसी प्रकार किसी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात हो तो उसकी भुजा की माप ज्ञात करने में भी वर्गमूल की आवश्कतया होती है। दैनिक जीवन में भी अनेक अवसरों पर वर्ग या वर्गमूल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती रहती है। इस इकाई में हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल निकालने की विधियों का अध्ययन करेंगे तथा जो संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं भी हैं उनका निकटतम वर्गमूल भी ज्ञात करने का अध्ययन करेंगे।

वर्ग और वर्गमूल की अवधारणा :

आप जानते हैं कि यदि किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करें तो गुणनफल से प्राप्त संख्या को, गुणा की गई संख्या का वर्ग कहते हैं। जैसे—

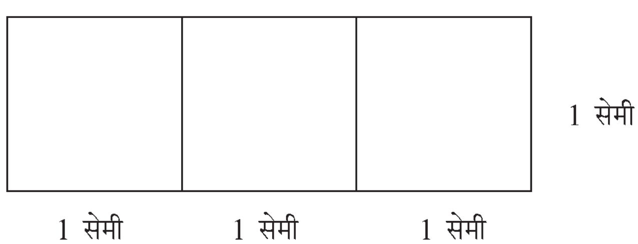
$5 \times 5 = 25 = 5^2$

$6 \times 6 = 36 = 6^2$

$7 \times 7 = 49 = 7^2$

उपरोक्त को कथनों के रूप में इस भाँति व्यक्त किया जा सकता है कि 5 वर्ग का 25 है, 6 का वर्ग 36 है और 7 का वर्ग 49 है। इस प्रकार किसी संख्या "की घात 2" को उस संख्या का वर्ग कहते हैं।

निम्नांकित आकृति को ध्यान से देखिए तथा उसके नीचे लिखे प्रश्नों का उत्तर सोचकर बताए



(क) उपर्युक्त आकृति के कितने भाग हैं?

(ख) प्रत्येक भाग में कितनी भुजाएँ हैं?

(ग) प्रत्येक भाग के भुजा की लम्बाई और चौड़ाई में क्या सम्बन्ध है?

(घ) इन आकृतियों को क्या कहते हैं?

आकृति को देखने से ज्ञात होता है कि—

(क) आकृति के कुल तीन भाग हैं।

(ख) प्रत्येक भाग में चार भुजाएँ हैं।

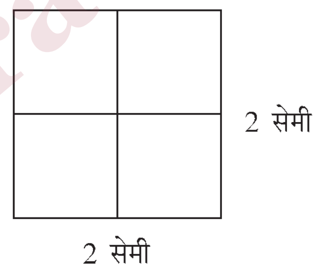
(ग) प्रत्येक भाग की भुजाओं की लम्बाई और चौड़ाई समान हैं।

(घ) प्रत्येक आकृति एक वर्ग हैं।

इस प्रकार यदि एक वर्ग की भुजा 2 सेमी हो तो उससे बनने वाले 1 सेमी.^{2} क्षेत्रफल के कुल वर्गों की संख्या

$2 \times 2 = 2^2 = 4$ होगी

जो चित्रानुसार भी सत्य है अर्थात् 4, 2 का वर्ग है।

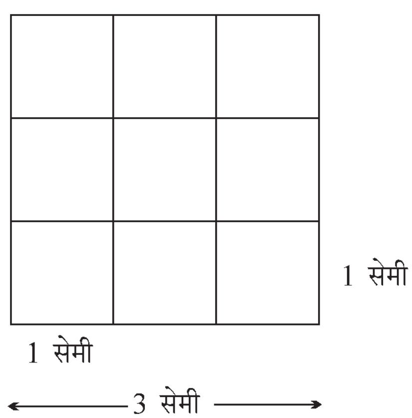


उदाहरण 1. 3 सेमी. भुजा के वर्ग में 1 सेमी.^{2} के क्षेत्रफल के वर्गों की संख्या चित्र बनाकर बताइ।

हल : सर्वप्रथम 3 सेमी भुजा का एक वर्ग बनाइए उसकी प्रत्येक भुजा को तीन समान भागों में बाँट कर आमने-सामने स्थित बिन्दुओं को मिलाइए।

इस प्रकार कुल वर्गों की संख्या 9 होगी

अर्थात् 9, संख्या 3 का वर्ग है।



उदाहरण 2. उपर्युक्त की भाँति 4 सेमी भुजा के वर्ग में 1 सेमी^{2} क्षेत्रफल के छोटे वर्गों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : 4 सेमी भुजा के वर्ग में 1 सेमी.^{2} क्षेत्रफल के कुल $4 \times 4 = 16$ वर्ग हैं।

उदाहरण 3. वह कौन सी संख्या है जिसको यदि उसी संख्या से गुणा करें तो गुणनफल 25 होता है?

हल : क्योंकि $5 \times 5 = 5^2 = 25$

अतः वह संख्या 5 है।

इसी प्रकार अन्य पूर्णांक लेकर हम देखते हैं कि :

$6 \times 6 = 6^2 = 36$

$7 \times 7 = 7^2 = 49$

जिस प्रकार से योग की विपरीत संक्रिया घटाना तथा गुणा की प्रतिलोम संक्रिया भाग है, उसी प्रकार वर्गमूल प्राप्त करना भी वर्ग करने की प्रतिलोम संक्रिया है। अतः

5 का वर्ग 25 है और 25 का वर्गमूल 5 है।

6 का वर्ग 36 है और 36 का वर्गमूल 6 है।

7 का वर्ग 49 है और 49 का वर्गमूल 7 है।

0 का वर्ग 0 है और 0 का वर्गमूल भी 0 है।

आप पढ़ चुके हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा × भुजा = (भुजा)^2

इस प्रकार वर्ग की एक भुजा का माप उस वर्ग के क्षेत्रफल का वर्गमूल होता है। वर्गमूल को चिन्ह $\sqrt{\ }$ से प्रदर्शित करते हैं।

$\sqrt{25}$ का अर्थ है, 25 का वर्गमूल।

$\sqrt{36}$ का अर्थ है, 36 का वर्गमूल।

इस प्रकार $\sqrt{25} = 5, \sqrt{36} = 6$ आदि।

उदाहरण 4. −1, −2, −3 और −4 ऋणात्मक पूर्णांक संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल : $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$

$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$

$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$

देखिए :

1. (−1) तथा 1 दोनों का वर्ग 1 है। अतः 1 के वर्गमूल $\pm\sqrt{1} = \pm 1$ हैं।

2. (−2) तथा 2 दोनों का वर्ग 4 है। अतः 4 के वर्गमूल $\pm\sqrt{4} = \pm 2$ है।

3. (−3) तथा 3 का वर्ग 9 है। अतः 9 के वर्गमूल $\pm\sqrt{9} = \pm 3$ है।

4. (−4) तथा 4 दोनों का वर्ग 16 है। अतः 16 के वर्गमूल $\pm\sqrt{16} = \pm 4$ है।

ध्यान दें : $\sqrt{25}$ का अर्थ 5 है तथा $-\sqrt{25}$ का अर्थ −5 है जबकि 5 तथा −5 दोनों ही 25 के वर्गमूल है।

निष्कर्ष :

1. शून्येतर पूर्णांकों के वर्ग धनात्मक पूर्णांक अथवा प्राकृतिक संख्याएँ होती हैं।
2. वर्ग पूर्णांकों के वर्गमूल धनात्मक तथा ऋणात्मक पूर्णांक होते हैं। यथा x^2 के वर्गमूल $\pm x$ है।
3. शून्य का वर्ग शून्य होता है।
4. शून्य का वर्गमूल शून्य होता है।

उदाहरण 5. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ परिमेय संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

हल : $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

(i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}, \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

(ii) इस प्रकार $\frac{4}{9}$ के वर्गमूल $\pm\frac{2}{3}, \frac{9}{16}$ के वर्गमूल $\pm\frac{3}{4}$ इत्यादि होंगे।

निष्कर्ष :

1. परिमेय संख्याओं के वर्ग धनात्मक परिमेय (भिन्न) होते हैं।
2. वर्ग परिमेय संख्याओं के वर्गमूल धनात्मक तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

प्रयास कीजिए :

1 से 9 तक की संख्याओं के वर्ग एवं उनके वर्गमूल पर आधारित निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

x	x^2	$\sqrt{x^2}$	x
1	1	$\sqrt{1}$	1
2	4	$\sqrt{4}$	...
3	...	$\sqrt{...}$	3
4	16	$\sqrt{16}$	...
5	...	$\sqrt{...}$	5
6	36	$\sqrt{...}$	...
7	...	$\sqrt{...}$	...
8	64	$\sqrt{...}$	8
9	81	$\sqrt{...}$	...

ध्यान दें : (1) यदि x प्राकृतिक संख्या हो तो x का वर्ग x^2 एक प्राकृतिक संख्या है।
(2) यदि x^2 प्राकृतिक संख्या हो तो x^2 के वर्गमूल $\pm x$ होते हैं किन्तु $-x$ प्राकृतिक संख्या नहीं है।

घन तथा घनमूल :

जब किसी संख्या को तीन बार लेकर उनका आपस में गुणा किया जाता है तो प्राप्त मान उस संख्या की तीन घात होती है।

आपको याद होगा कि

$2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$

$3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

$5 \times 5 \times 5 = 5^3 = 125$

उपरोक्त संक्रिया को इन कथनों में व्यक्त किया जा सकता है कि 2 का घन 8 है, 3 का घन 27 है, 5 का घन 125 है। अर्थात् किसी संख्या का घन "उस संख्या की घात 3" होता है।

दैनिक जीवन में हम घन का प्रयोग किसी वस्तु का आयतन एवं धारिता ज्ञात करने तथा इनकी इकाई निर्धारण में करते हैं, जबकि घनमूल का उपयोग घनाकार वस्तुओं का आयतन ज्ञात होने पर इसकी एक भुजा की लम्बाई ज्ञात करने के लिये किया जाता है।

घन और घनमूल की अवधारणा

घन—आइए घन ज्ञात करने की विधा को कुछ उदाहरण के माध्यम से समझें। आप जानते हैं कि—

(1) $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$

(2) $(-5)\ (-5)\ (-5) = (-5)^3 = -125$

(3) $\left(\frac{2}{7}\right) \times \left(\frac{2}{7}\right) \times \left(\frac{2}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}\right)^3 = \frac{8}{343}$

(4) $\left(-\frac{9}{8}\right) \times \left(-\frac{9}{8}\right) \times \left(-\frac{9}{8}\right) = \left(-\frac{9}{8}\right)^3 = -\frac{729}{512}$

(5) $m \times m \times m = m^3 = n$

अर्थात् एक परिमेय संख्या n को पूर्ण घन तब कहते हैं, जब किसी परिमेय संख्या m के लिए

$n = m \times m \times m$

$= m^3$ हो

पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ :

निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए—

प्राकृतिक संख्या x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राकृतिक संख्या के घन (x^3) का मान	1	8	27	...	...	...	...	...	...	1000

ध्यान दीजिये कि 1 से 1000 तक की संख्याओं में केवल दस संख्याएँ पूर्ण घन हैं। (जाँच करके देखिए)

इन्हें कीजिए :

अब 11 से 20 तक की संख्याओं के घन की सारणी बनाइए। सारणी को देखकर सम संख्याओं के घनों और विषम संख्याओं के घनों की सूची बनाकर निष्कर्ष निकालिए।

आप सूची को देखकर बता सकते हैं कि सम संख्याओं के घन सम संख्या और विषम संख्याओं के घन विषम संख्या होती हैं।

संख्या (x)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
संख्या के घन (x^3) का मान	1331 विषम	1728 सम	2197 विषम	2744 सम	3375 विषम	4096 सम	4913 विषम	5832 सम	6859 विषम	8000 सम

हम देखते हैं कि किसी प्राकृतिक संख्या का घन करने पर प्राप्त होने वाली संख्या भी एक प्राकृतिक संख्या है। इस प्रकार प्राप्त प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ कहलाती हैं।

निष्कर्ष :

1. 1000 तक की पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ, क्रमशः 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 और 1000 हैं। अन्य प्राकृतिक संख्याएँ 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, ... 999 पूर्ण घन संख्याएँ नहीं हैं।
2. सबसे छोटी पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या 1 है।
3. कोई भी प्राकृतिक संख्या सबसे बड़ी पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या नहीं कही जा सकती है, क्योंकि उससे भी बड़ी प्राकृतिक घन संख्या लिखी जा सकती है। अतः प्राकृतिक पूर्ण घन संख्याएँ अनन्त हैं।
4. प्रत्येक प्राकृतिक संख्या का घन करने पर एक पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या प्राप्त होती है।
5. प्रत्येक प्राकृतिक संख्या पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या नहीं होती है।

प्रयास कीजिए :

- 1 पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या है, क्यों?
- 216 किस प्राकृतिक संख्या का घन है?
- 21, 31, 27 और 46 का घन लिखिए।
- 23^3, 29^3 और 26^3 का मान लिखिए।
- 4096, 5832 और 6859 का घनमूल ज्ञात कीजिए।
- क्या 0 पूर्ण घन संख्या है?
- $\frac{9}{13}, \frac{7}{22}$ और $\frac{13}{29}$ के घन बताइए।

घन और उनके अभाज्य गुणनखण्ड :

निम्नांकित सारणी को देखिए :

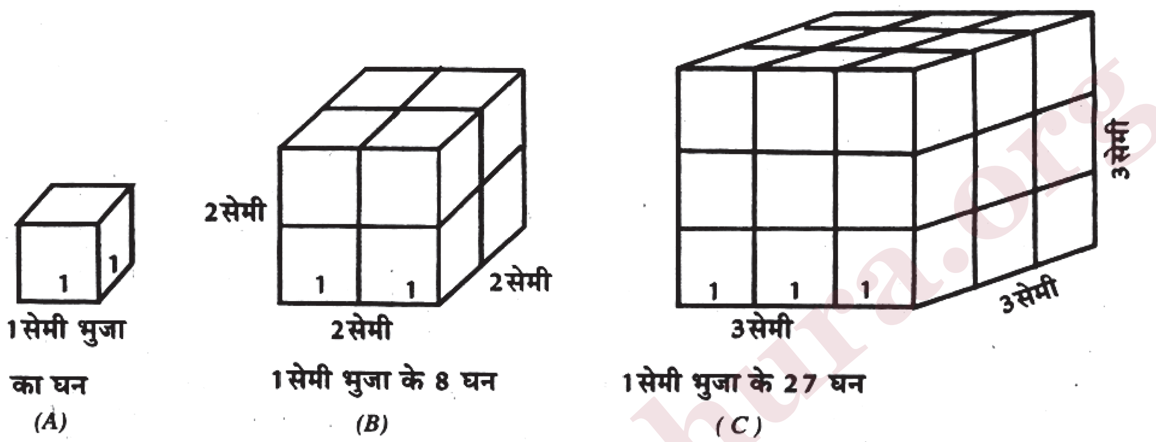
संख्या	2	3	$\frac{4}{5}$	$\frac{-5}{6}$	0.1	0.5
संख्या के घन का मान	8	27	$\frac{64}{125}$	$\frac{-125}{216}$	0.001	0.125

प्रयास कीजिए :

- संख्या के 10 से छोटी होने पर उसके घन का मान 1000 से छोटा है अथवा बड़ा?
- संख्या के 10 से बड़ी होने पर उसके घन का मान 1000 से छोटा है अथवा बड़ा?
- 1 से 100 तक की पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ लिखिए।
- 1 से 1000 तक की पूर्ण घन संख्याएँ कितनी हैं?
- सबसे छोटी पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या कौन सी है?

घन का ज्यामितीय निरूपण

आपने ज्यामिति में पढ़ा है कि घन एक ऐसी ठोस आकृति है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, नीचे तीन घनों के चित्र बने हैं जिनके भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 1 सेमी, 2 सेमी और 3 सेमी हैं।



ध्यान दीजिए :

चित्र (A) में एक 1 सेमी भुजा का घन है। चित्र (B) में एक 2 सेमी भुजा का घन है इस घन का आयतन 8 सेमी^{3} है और इसमें 1 सेमी भुजा के 8 घन है, चित्र (C) में एक 3 सेमी भुजा का घन है इस घन का आयतन 27 सेमी^{3} है और इसमें 1 सेमी भुजा के 27 घन हैं।

घनमूल

हम जानते हैं कि

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$
$$-64 = (-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

या $0.001 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = (0.1)^3$

$$-\frac{1}{8}=\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि 2 का घन 8, (−4) का घन (−64) $\frac{1}{10}$ का घन $\frac{1}{1000}$ या 0.1 का घन (0.001) तथा $\left(-\frac{1}{2}\right)$ का घन $\left(-\frac{1}{8}\right)$ है।

विलोमतः हम कह सकते हैं कि 8 का घनमूल 2, (−64) का घनमूल (−4), $\frac{1}{1000}$ का घनमूल $\frac{1}{10}$ या 0.001 का घनमूल 0.1 तथा $\left(-\frac{1}{8}\right)$ का घनमूल $\left(-\frac{1}{2}\right)$ है, जिन्हें हम निम्न प्रकार से दर्शाते हैं—

$\sqrt[3]{8}=2$

$\sqrt[3]{-64}=-4$

$\sqrt[3]{\frac{1}{1000}}=\frac{1}{10}$

या $\sqrt[3]{0.001}=0.1$

तथा $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}}=-\frac{1}{2}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि वर्गमूल के चिन्ह ($\sqrt{\ }$) के ऊपर बाईं ओर ऊपर यदि हम संख्या 3 लिख देते हैं तो वह घनमूल चिन्ह को प्रदर्शित करता है।

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि यदि परिमेय संख्या p, परिमेय संख्या q का घनमूल है, तो $q = p^3$ होगा।

प्रयास कीजिए :

1. 27 किस संख्या का घन है?
2. 125 को आधार 5 के घातीय संकेतन के रूप में कैसे लिखेंगे?
3. $\frac{-125}{216}$ किस संख्या के घन का मान है?
4. 0.001 किस संख्या को 3 बार लेकर आपस में गुणा करने से प्राप्त होगा?

- किसी संख्या का घनमूल वह संख्या है जिसका घन करने पर मूल संख्या प्राप्त हो जाती है।
- एक परिमेय संख्या m, परिमेय संख्या n का घनमूल है, यदि $m^3 = n$
- यदि m, n का घनमूल है तो m का घन n है।

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल निकालिये :

(i) 8 (ii) $\frac{-8}{27}$ (iii) $\frac{-64}{1331}$

उदाहरण 1. क्या 243 एक पूर्ण घन है?

हल : $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

यहाँ 3 का त्रिक बनाने पर 3 × 3 शेष रहता है अतः 243 पूर्ण घन नहीं है।

उदाहरण 2. क्या 729 पूर्ण घन संख्या है?

हल : $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

तीन तीन का समूह बनाने पर कोई गुणनखण्ड शेष नहीं है।

अतः 729 पूर्ण घन संख्या है।

निम्न पर सामूहिक चर्चा कीजिए :

1. किस संख्या का घन 64 है?

2. $\frac{1}{5}$ का घन बताइए।

3. 0.1 का घन बताइए।

4. निम्नांकित कथनों में से छाँट कर सत्य या असत्य बताइए :

(i) $\sqrt[3]{\frac{16}{25}} = \frac{2}{5}$

(ii) $\sqrt[3]{10,00,000} = 100$

(iii) 1 पूर्णघन नहीं है।

———

इकाई-3

किसी संख्या का वर्गमूल तथा दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना

पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल

देखिए :

यदि y एक पूर्ण वर्ग परिमेय संख्या है तो y को $(x)^2$ अथवा $(-x)^2$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ x एक परिमेय संख्या है, अर्थात्

$y = (x)^2$ अथवा $y = (-x)^2$

अतः y के वर्गमूल $\sqrt{y} = x$ तथा $\sqrt{y} = -x$ दोनों है।

निष्कर्ष :

> **किसी भी पूर्ण वर्ग परिमेय संख्या $y = x^2$ के वर्गमूल $\pm\sqrt{y} = \pm x$ होते हैं, जहाँ x स्वयमेव एक परिमेय संख्या है।**

विशेष :

(1) पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल दो विपरीत चिह्नों वाली समान संख्याएँ होती हैं तथा उन्हें उसके वर्गमूल कहते हैं।

(2) सुविधा की दृष्टि से दी हुई संख्या का एक वर्गमूल ज्ञात करके दूसरे को विपरीत चिह्न लगाकर ज्ञात कर लेते हैं।

गुणनखण्ड विधि से पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करना

उदाहरण 12. निम्नलिखित पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 36 (ii) 144

हल : (i) 36 का वर्गमूल ज्ञात करना है।

पहले 36 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

2	36
2	18
3	9
	3

$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$

अभाज्य गुणनखण्डों में से समान संख्याओं के जोड़े बनाते हैं।

$36 = \overline{2 \times 2} \times \overline{3 \times 3}$

प्रत्येक जोड़े में से एक अभाज्य गुणनखण्ड लेकर उनके गुणनफल प्राप्त करते हैं :

यहाँ पर $2 \times 3 = 6$

अर्थात् $\sqrt{36} = 6,$

इस प्रकार 36 के वर्गमूल +6, −6 हुए।

(ii) 144 का वर्गमूल ज्ञात करना है।

पहले 144 के अभाज्य गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
	3

अभाज्य गुणनखण्डों में से समान संख्याओं के जोड़े बनाते हैं।

$144 = \overline{2 \times 2} \times \overline{2 \times 2} \times \overline{3 \times 3}$

प्रत्येक जोड़े में से एक अभाज्य गुणनखण्ड लेकर उनके गुणनफल प्राप्त करते हैं :

यहाँ पर $2 \times 2 \times 3 = 12$

अर्थात्, $\sqrt{144} = 12$

इस प्रकार 144 के वर्गमूल +12, −12 हुए।

उदाहरण 13. गुणनखण्ड विधि से निम्नांकित पूर्ण वर्ग संख्याओं के धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 576 (ii) 2025

हल : (i) 576 का वर्गमूल $= \sqrt{576}$

$$\because \quad 576 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3$$
$$= \overline{2\times 2}\times\overline{2\times 2}\times\overline{2\times 2}\times\overline{3\times 3}$$
$$\therefore \quad \sqrt{576} = 2\times 2\times 2\times 3$$
$$= 24$$

अत : $\sqrt{576} = 24$

2	576
2	288
2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
	3

(ii) 2025 का वर्गमूल $= \sqrt{2025}$

$\because$ 2025 = 3 × 3 × 3 × 3 × 5 × 5

या $2025 = \overline{3\times 3}\times\overline{3\times 3}\times\overline{5\times 5}$

$$\therefore \sqrt{2025} = 3\times 3\times 5$$
$$= 45$$

5	2025
5	405
3	81
3	27
3	9
	3

अतः $\sqrt{2025} = 45$

किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए :

(1) सबसे पहले दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं।

(2) प्राप्त अभाज्य गुणनखण्डों से समान खण्डों के जोड़े बनाते हैं।

(3) प्रत्येक जोड़े में से एक अभाज्य गुणनखण्ड चुन लेते हैं।

(4) इन चुने हुए अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल ही दी गई संख्या का धनात्मक वर्गमूल होता है।

(5) निकाले गये वर्गमूल के चिह्न को बदलकर दोनों वर्गमूल ज्ञात किये जा सकते हैं।

गुणनखण्ड विधि से दो संख्याओं के गुणनफल अथवा भागफल का वर्गमूल ज्ञात करना

हमने पूर्ण वर्ग पूर्णांक संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात किये हैं। इसी प्रकार अब हम पूर्ण वर्ग परिमेय संख्याओं के वर्गमूल भी ज्ञात कर सकते हैं।

निम्नलिखित उदाहरणों को ध्यान से पढ़िए।

(क)
$$\begin{aligned}\sqrt{9\times100} &= \sqrt{(3\times3)\times(2\times2)\times(5\times5)}\\ &= 3\times2\times5\\ &= 3\times10\\ &= \sqrt{9}\times\sqrt{100}\end{aligned}$$

अतः $\sqrt{9\times100}=\sqrt{9}\times\sqrt{100}$

(ख)
$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{4}{9}} &= \sqrt{\frac{2\times2}{3\times3}}=\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}\\ &= \frac{2}{3}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\end{aligned}$$

अतः $\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि :

यदि a और b दो पूर्ण वर्ग संख्याएँ हों, तथा द्वितीय (भाग की) स्थिति में, $b \neq 0$

$$\boxed{\sqrt{a\times b}=\sqrt{a}\times\sqrt{b} \quad \text{और} \quad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

उदाहरण 14. परिमेय संख्या $\frac{256}{441}$ के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{256}{441}$ का वर्गमूल $=\sqrt{\frac{256}{441}}=\frac{\sqrt{256}}{\sqrt{441}}$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

3	441
3	147
7	49
	7

तथा $\sqrt{256}=2\times2\times2\times2$

$\sqrt{441}=3\times7$

$\therefore\sqrt{\frac{256}{441}}=\frac{2\times2\times2\times2}{3\times7}$

अतः $\frac{256}{441}$ के वर्गमूल $\pm\frac{16}{21}$ हैं।

उदाहरण 15. संयुक्त भिन्न $2\frac{14}{25}$ का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $2\frac{14}{25}=\frac{64}{25}$, (विषम भिन्न में बदलने पर)

$2\frac{14}{25}$ का वर्गमूल $=\sqrt{2\frac{14}{25}}=\sqrt{\frac{64}{25}}$

$=\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}}$

$\because\sqrt{64}=2\times2\times2$

$\sqrt{25}=5$

$\therefore\sqrt{\frac{64}{25}}=\frac{2\times2\times2}{5}$

$=\frac{8}{5}$, अत : $\sqrt{\frac{64}{25}}=\pm\frac{8}{5}$

2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
	2

5	25
	5

प्रयास कीजिए :

> निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
>
> (i) $\frac{121}{625}$ (ii) $\frac{225}{49}$

उपर्युक्त उदाहरणों से निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होता है :

(1) यदि परिमेय संख्या संयुक्त भिन्न के रूप में है, तो सबसे पहले इसे विषम भिन्न में बदलते हैं।

(2) प्राप्त भिन्न के अंश और हर के अलग-अलग वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

(3) अंश और हर के वर्गमूलों को अंश और हर में लिखने पर प्राप्त भिन्न दी गई परिमेय संख्या का वर्गमूल होता है।

उदाहरण 16. एक सेनानायक ने अपने 3600 जवानों की एक टोली को विभिन्न पंक्तियों में इस प्रकार खड़े होने को कहा, जिससे प्रत्येक पंक्ति में उतने ही जवान खड़े हों, जिनती पंक्तियाँ हैं। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक पंक्ति में कितने जवान खड़े होंगे।

हल : प्रत्येक पंक्ति में जवानों की संख्या $=\sqrt{3600}$

पहले हम 3600 के अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं।

2	3600
2	1800
2	900
2	450
5	225
5	45
3	9
	3

$$3600 = \overline{2\times2}\times\overline{2\times2}\times\overline{3\times3}\times\overline{5\times5}$$

अतः $\sqrt{3600} = 2\times2\times3\times5 = 60$

विशेष : जवानों की संख्या ऋणात्मक नहीं हो सकती है, अतः उत्तर में -60 नहीं लेंगे। प्रत्येक पंक्ति में जवानों की संख्या 60 है।

उत्तर की जाँच—$60 \times 60 = 3600$

अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 17. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 6075 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग हो।

हल : पहले हम 6075 के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात करते हैं।

$$\begin{array}{c|l} 5 & 6075 \\ \hline 5 & 1215 \\ \hline 3 & 243 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$6075 = 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

अभाज्य गुणनखण्डों के जोड़े बनाने पर

$6075 = \overline{5 \times 5} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{3 \times 3} \times 3$

यहाँ समान अभाज्य गुणनखण्डों के विभिन्न के विभिन्न जोड़े बनाने के पश्चात् हम देखते हैं कि एक अभाज्य गुणनखण्ड 3 शेष रह जाता है, जिसका जोड़ा नहीं है।

अतः यदि 6075 को 3 से गुणा कर दें तो इस 3 का भी जोड़ा बन जाएगा और गुणनफल एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी।

उदाहरण 18. उपर्युक्त उदाहरण 17 में दी गयी संख्या में किस छोटी से छोटी संख्या से भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा।

हल : $\because 6075 = \overline{5 \times 5} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{3 \times 3} \times 3$

हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखण्ड 3 का जोड़ा नहीं हैं तथा उससे भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग संख्या होगी। अतः अभीष्ट संख्या 3 है।

भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

गुणनखण्ड विधि से हम केवल पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं, क्योंकि इनके अभाज्य गुणनखण्ड सरलता से ज्ञात किये जा सकते हैं। जिन संख्याओं के गुणनखण्ड सरलता से नहीं

ज्ञात किये जा सकते अथवा जो पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं तो उनके वर्गमूल हम भाग विधि से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 19. 1849 का धन वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल : 1849 का धन वर्गमूल $= \sqrt{1849}$

1. इकाई अंक से प्रारम्भ करके अंकों के प्रत्येक जोड़े पर पड़ी रेखा खींचती हैं।
2. 1 से 9 तक की संख्याओं में से उस संख्या का वर्ग ज्ञात करते हैं, जिसका मान प्रथम जोड़ा 18 के बराबर या 18 से कम है। जैसे—$4^2 = 16$
3. वर्गमूल के दहाई स्थान पर 4 लिखते हैं और 4 के वर्ग 16 को 18 के नीचे लिखकर घटाते हैं।
4. शेषफल 2 के आगे दूसरे जोड़े 49 को उतार लेते हैं, इस प्रकार नया भाज्य 249 है।
5. अगली क्रिया में नये भाजक को प्राप्त करने के लिए पहले पूर्व भाजक 4 का दूना 8 लिखते हैं अथवा 4 में 4 जोड़कर 8 प्राप्त कर लेते हैं।
6. 249 के इकाई अंक को छोड़कर 24 में नये भाजक 8 से भाग देते हैं। भागफल 3 आता है। 3 को पूर्व में प्राप्त 8 के दाहिने स्थान पर रखते हैं।
7. 83 में 3 से गुणा करके गुणनफल को भाज्य 249 के नीचे रखकर घटाते हैं। शेषफल शून्य आता है।
8. इस प्रकार प्राप्त संख्या 43 अभीष्ट वर्गमूल है।

		43
	4	$\overline{18}\ \overline{49}$
	+4	16
$(4 \times 2 = 8)$	83	249
		249
		0

अतः $\sqrt{1849} = 43$

प्राप्त वर्गमूल 43 को 43 से गुणा करके उत्तर की जाँच कीजिए।

$43 \times 43 = 1849$

अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 20. भागविधि से 11449 का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 11449 का धन वर्गमूल $= \sqrt{11449}$

		107
	1	$\overline{1}\ \overline{14}\ \overline{49}$
	+1	1
$(1 \times 2 = 2)$	207	0 1449
		1449
		0

1. इकाई स्थान से प्रारम्भ करके संख्या के अंकों के जोड़े बनायें। दस हजारवें स्थान के अंक 1 का जोड़ा नहीं है। 1 का वर्गमूल 1 होता है। अतः वर्गमूल में सैकड़े के स्थान पर 1 लिखें और 1 के नीचे लिखकर घटायें। अब दायीं ओर दूसरा जोड़ा 14 है। 1 का दूना 2 आता है। अथवा $1 + 1 = 2$ आता है।
2. यहाँ 14 की दहाई 1 में नये भाजक 2 का भाग देने पर भागफल शून्य आता है। अतः नये भाजक 2 के दाहिने स्थान पर 0 लिखकर 20 प्राप्त किया एवं अभीष्ट वर्गमूल 1 के आगे भी 0 रखते हैं।
3. 14 के आगे का जोड़ा 49 उतार लेते हैं। नया भाज्य 1449 के 9 को छोड़कर शेष 144 में 20 का भाग देने पर भागफल 7 आता है।
4. शेष क्रिया पूर्व की भाँति करके अभीष्ट वर्गमूल प्राप्त करें।

उदाहरण 21. भाग विधि से $21\frac{2797}{3364}$ का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$21\frac{2797}{3364} = \frac{21 \times 3364 + 2797}{3364} = \frac{70644 + 2797}{3364} = \frac{73441}{3364}$$

	271
2	$\overline{7}\ \overline{34}\ \overline{41}$
+2	4
47	3 34
+7	3 29
541	541
	541
	0

	58
5	$\overline{33}\ \overline{64}$
+5	25
108	864
	864
	0

(ध्यान दें, 33 में 4 की भागफल 8 आता है पर 48 में 8 का गुणा करने पर 334 से अधिक आ जाता है।)

इस प्रकार $\sqrt{21\frac{2797}{3364}} = \sqrt{\frac{73441}{3364}}$

$$= \frac{271}{58} = 4\frac{39}{58}$$

उदाहरण 22. वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 194491 में से घटाने पर शेषफल पूर्ण वर्ग हो जाय।

हल :

	441
4	$\overline{19}\ \overline{44}\ \overline{91}$
+4	16
84	344
+4	336
881	891
	881
	10

दी गई संख्या का वर्गमूल भाग विधि से निकालने पर शेषफल 10 बचता है। यदि संख्या में से 10 घटा दिया जाय तो शेषफल पूर्व वर्ग होगा।

अतः वह छोटी से छोटी संख्या 10 है।

उदाहरण 23. वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे यदि 306452 में जोड़ दें, तो योगफल पूर्ण वर्ग हो जाय।

हल :

	553
5	$\overline{30}\ \overline{64}\ \overline{52}$
+5	25
105	564
+5	525
1103	3952
	3309
	643

	554
5	$\overline{30}\ \overline{64}\ \overline{52}$
+5	25
105	564
+5	525
1104	3952
	4416
	– 464

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि दी गई संख्या $(553)^2$ से बड़ी है परन्तु $(554)^2$ से छोटी है। यदि दी गई संख्या में हम (4416 – 3952) अर्थात् 464 जोड़ दें, तो योगफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा।

अतः अभीष्ट संख्या 464 है। अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

306452 + 464 = 306916

306916 का भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात कीजिए। देखिए यह एक पूर्ण वर्ग संख्या है।

उदाहरण 24. छः अंकों की छोटी से छोटी पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : छः अंकों की छोटी सं छोटी संख्या 100000

100000 का वर्गमूल $= \sqrt{100000}$

	316
3	$\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+3	9
61	100
+1	61
626	3900
	3756
	144

	317
3	$\overline{10}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+3	9
61	100
+1	61
627	3900
	4389
	– 489

100000 का वर्गमूल ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि यह छः अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या से 489 कम है।

अतः छः अंकों की छोटी पूर्ण वर्ग संख्या

$= 100000 + 489$

$= 100489$

उदाहरण 25. छः अंकों की बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : छः अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 999999

999999 का वर्गमूल $= \sqrt{999999}$

	999
9	$\overline{99}\ \overline{99}\ \overline{99}$
+9	81
189	1899
+9	1701
1989	19899
	17901
	1998

999999 का वर्गमूल ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि प्राप्त वर्गमूल का वर्ग $(999)^2$, 999999 से 1998 कम है।

अतः छह अंकों की वह बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या

$= 999999 - 1998$

$= 998001$

वर्ग संख्या और उसके वर्गमूल में अंकों की संख्याओं में सम्बन्ध

निम्नांकित उदाहरणों में हम संख्या और उनके वर्गमूल में अंकों की संख्या के सम्बन्ध में विचार करेंगे।

1 से 9 तक के पूर्णांकों के वर्ग तथा उनके वर्गमूल की तालिका को देखिए, जहाँ a एक पूर्णांक है।

a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$	a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$
1	1	$\sqrt{1}$	± 1	6	36	$\sqrt{36}$	± 6
2	4	$\sqrt{4}$	± 2	7	49	$\sqrt{49}$	± 7
3	9	$\sqrt{9}$	± 3	8	64	$\sqrt{64}$	± 8
4	16	$\sqrt{16}$	± 4	9	81	$\sqrt{81}$	± 9
5	25	$\sqrt{25}$	± 5				

तालिका से स्पष्ट है कि 1 से 9 तक की प्रत्येक संख्या का वर्ग करने पर प्राप्त संख्या में एक या दो अंक होते हैं अर्थात् एक या दो अंकों वाली संख्या के वर्गमूल एक अंक की संख्या होती है।

प्रयास कीजिए :

10 से 99 तक में से कुछ संख्याओं जैसे 10, 25, 31, 32, 50, 65, 85, 99 के वर्गों SJeb Gvekeâ Jeie&eue lees&ue ke&eâe oe\/VDeskeâe ke&eâfpeS, peneB a पूर्णांक है।

a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$	a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$
10	....	....	....	50	....	....	....
25	625	$\sqrt{625}$	± 25	65	....	....	....
31	....	....	....	85	....	....	....
32	1024	$\sqrt{1024}$	± 32	99	9801	$\sqrt{9801}$	± 99

उपर्युक्त तालिका से हमें ज्ञात होता है कि 10 से 99 तक की संख्या के वर्ग करने पर प्राप्त संख्याएँ 3 या 4 अंकों की है और प्रत्येक के वर्गमूल में दो अंक हैं। हम देख सकते हैं कि 100 से 999 तक की संख्याओं (अर्थात् तीन अंक वाली संख्याएँ) के वर्गों में पाँच या छह अंक होंगे अर्थात् पाँच या छः अंकों की संख्या के वर्गमूल में तीन अंक होंगे।

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपने अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए :

पूर्ण वर्ग संख्याओं में अंकों की संख्या	इन संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या
1 या 2 अंक	1
3 या 4 अंक	...
5 या 6 अंक	...
7 या 8 अंक	4
9 या 10 अंक	...

किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करना

किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने के लिए, उससंख्या के अंकों पर दायीं ओर से अर्थात् इकाई अंक से प्रारम्भ करके अंकों के प्रत्येक जोड़े पर पड़ी रेखा खींचते जाते हैं। बायीं ओर यदि एक ही अंक शेष रहता है, तो उस पर भी पड़ी रेखा खींचते हैं।

खींची गई पड़ी रेखाओं की संख्या उस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या को व्यक्त करती है। स्पष्ट है कि

1. यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या में अंकों की संख्या सम हो, तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या उसके अंकों की संख्या की आधी होती है।
2. यदि किसी पूर्ण वर्ग संख्या में अंकों की संख्या विषम है, तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या उसके अंकों की संख्या की उत्तरवर्ती संख्या के आधे के बराबर होती है।

उदाहरण 26. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए।

256, 1225, 14641, 783225

हल :

(i) $\overline{2}\,\overline{56}$ में पड़ी रेखा की संख्या दो है।

अतः 256 के वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है।

(ii) $\overline{12}\,\overline{25}$ में पड़ी रेखाओं की संख्या दो है। इसके वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है।

(iii) $\overline{1}\,\overline{46}\,\overline{41}$ में पड़ी रेखाओं की संख्या 3 है। अतः इसके वर्गमूल में अंकों की संख्या 3 होगी।

(iv) $\overline{78}\,\overline{32}\,\overline{25}$ में पड़ी रेखाओं की संख्या 3 है। अतः इसके वर्गमूल में अंकों की संख्या 3 होगी।

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. दो अंकों की किसी संख्या के वर्ग में कम से कम कितने अंक होते हैं?

2. तीन अंकों की किसी संख्या के वर्ग में अधिक से अधिक कितने अंक होते हैं?

3. 289 के वर्गमूल में कितने अंक होंगे?

4. 15625 के वर्गमूल में कितने अंक होंगे?

5. छह अंकों की संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या बताइए।

दशमलव संख्या का वर्गमूल

पूर्ण वर्ग पूर्णांक संख्याओं की भाँति हम परिमेय संख्याओं के भी वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कर सकते हैं। इस विधि में पहले दी गई परिमेय संख्या को दशमलव संख्या में व्यक्त करते हैं, उसके बाद भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित तालिका को ध्यान से देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति अपने अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए। यहाँ x एक दशमलव संख्या है।

x	x^2	$\sqrt{x^2}$	$\pm x$
0.3	0.09	$\sqrt{.09}$	± 0.3
0.5	0.25	$\sqrt{...}$	...
0.41	0.1681	$\sqrt{...}$	± 0.41
4.1	...	$\sqrt{16.81}$	...
7.5	...	$\sqrt{56.25}$	...
1.25	1.5625	$\sqrt{...}$	...

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि :

1. वर्ग परिमेय संख्या में दशमलव अंकों की संख्या सदैव सम होती है और उनके वर्गमूल में दशमलव अंकों की संख्या वर्ग संख्या में दशमलव अंकों की संख्या की आधी होती है।
2. दशमलव संख्या के पूर्णांक भाग में पूर्व विधि से वर्गमूल के अंकों की गणना की जाती है।

उदाहरण 28. 4.6225 का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल :

	2.15
2	$\overline{4}.\ \overline{62}\ \overline{25}$
+2	4
41	62
+1	41
425	2125
	2125
	0

1. दशमलव से प्रारम्भ करके दाहिनी ओर प्रत्येक दो अंकों पर एक पड़ी रेखा खींचते हैं।
2. पूर्णांक भाग में इकाई से प्रारम्भ करके बायीं ओर प्रत्येक दो अंकों के जोड़ेपर एक पड़ी रेखा खींचते हैं। यदि सबसे बायीं ओर केवल एक अंक बचे तो उस पर भी पड़ी रेखा खींचते हैं।
3. यदि दशमलव अंक की संख्या सम नहीं है, तो सबसे दायीं ओर शून्य बढ़ाकर अंकों की संख्या सम करके पड़ी रेखा खींचते हैं।
4. आगे की क्रिया भाग विधि से पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल निकालने के समान है। केवल दशमलव अंक का पहला जोड़ा उतारने के पहले वर्गमूल में दशमलव का चिह्न लगा देते हैं।

उदाहरण 29. 0.00053361 के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 0.00053361 का वर्गमूल $=\sqrt{0.00053361}$

	0.0231
2	$0.\overline{00}\ \overline{05}\ \overline{33}\ \overline{61}$
+2	4
43	133
+3	129
461	461
	461
	0

अतः $=\sqrt{0.00053361}=0.0231$ इस प्रकार 0.00053361 के वर्गमूल ± 0.0231 है।

ऐसी संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना जो पूर्ण वर्ग नहीं हैं

ऐसी दशा में यदि दी गयी संख्या दशमलव भिन्न है अथवा उस रूप में व्यक्त की जा सकती है, तो अन्तिम अंक के आगे कुछ आवश्यक शून्य बढ़ाते हैं। परन्तु यदि संख्या दशमलव भिन्न में नहीं है, तो अन्तिम अंक के आगे दशमलव बिन्दु रखकर उसके बाद उतने शून्य बढ़ाते हैं, जिससे कि वर्गमूल पूछे गये दशमलव के बाद के स्थानों तक ज्ञात किया जा सके।

उदाहरण 30. 0.9 का धन वर्गमूल दशमलव के दो स्थान तक निकटतम ज्ञात कीजिए।

हल : पहले 9 के आगे उतने शून्य बढ़ाते हैं, जिससे अंकों के तीन (= 2 + 1) जोड़े बन सकें।

जैसे—

	0.948
9	$0.\overline{90}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+9	81
184	900
+4	736
1888	16400
	15104
	1296

वर्गमूल के तीसरे स्थान पर 8 है जो कि 5 से बड़ा है। अतः दशमलव के निकटतम दो स्थान तक शुद्ध उत्तर लिखने के लिए दूसरे स्थान के अंक को 1 बढ़ा देते हैं।

अतः $\sqrt{0.9} = 0.95$

उदाहरण 31. $\sqrt{2}$ का मान दशमलव के तीन स्थानों तक निकटतम ज्ञात कीजिए।

हल : पहले 2 के बाद दशमलव रखकर इसके बाद उतने शून्य बढ़ाते हैं, जिससे अंकों के चार (= 3 + 1) जोड़े बन सकें।

	1.4142
1	$\overline{2}.\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}\ \overline{00}$
+1	1
24	100
+4	96
281	400
+1	281
2824	11900
+4	11296
28282	60400
	56564
	3836

$\because$ वर्गमूल में दशमलव के चौथे स्थान पर 2 है जोकि 5 से कम है अतः दशमलव के तीन स्थान तक निकटतम वर्गमूल 1.414 होगा।

$\therefore \sqrt{2} = 1.414$

उदाहरण 32. $10\frac{2}{3}$ का धन वर्गमूल दशमलव के निकटतम तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए।

हल : $10\frac{2}{3} = \frac{32}{3} = 10.66666666$

अतः $\sqrt{10\frac{2}{3}} = \sqrt{10.66666666}$

	3.2659
3	$\overline{10}.\ \overline{66}\ \overline{66}\ \overline{66}\ \overline{66}$
+3	9
62	166
+2	124
646	4266
+6	3876
6525	39066
+5	32625
65309	644166
	587781
	56385

वर्गमूल में दशमलव के चौथे स्थान पर 9 है, जो कि 5 से अधिक है।

अतः $\sqrt{10\frac{2}{3}} = 3.266$

उदाहरण 30, 31, एवं 32 के उत्तरों का अवलोकन करने पर हम देखते हैं कि

$\sqrt{.9} = 0.948...$

$\sqrt{2} = 1.4142...$

$\sqrt{10\frac{2}{3}} = 3.2659...$

इस प्रकार सभी वर्गमूल परिमेय संख्याएँ नहीं हैं क्योंकि वे भिन्न अथवा सान्त दशमलव द्वारा व्यक्त नहीं की जा सकती हैं।

ऐसी संख्याएँ जो परिमेय नहीं होती हैं, अपरिमेय कहलाती हैं।

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. 0.16 के वर्गमूल बताइए?

2. 0.3 किस संख्या का वर्गमूल है?

3. 0.5 किस संख्या का वर्गमूल है?

मूल्यांकन

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर को चिन्हांकित (✓) कीजिए।

1. $\frac{112}{\sqrt{196}} \times \frac{\sqrt{576}}{12} \times \frac{\sqrt{256}}{8} = ?$

(a) 8 (b) 16

(c) 32 (d) 24

2. $\sqrt{1296} = (?)^2$

(a) 6 (b) 1296

(c) 625 (d) 36

3. $\sqrt{2025} = ? \times \sqrt{81}$

(a) 9 (b) 5

(c) 3 (d) 11

4. $\sqrt{894916} = ?$

(a) 856 (b) 920

(c) 946 (d) 880

5. $\dfrac{\sqrt{32}+\sqrt{48}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}} = ?$

(a) 2 (b) 4

(c) 8 (d) $\sqrt{2}$

6. किसी संख्या के वर्ग का $\frac{5}{9}$ भाग यदि 3125 हो, तो वह संख्या क्या है?

(a) 75 (b) 150

(c) 625 (d) 5625

7. $\sqrt{0.9} = ?$

(a) 0.3 (b) 0.03

(c) 0.9 (d) 0.09

8. यदि $\dfrac{x}{\sqrt{2.25}} = 550$ हो, तो x का मान है—

(a) 825 (b) 82.5

(c) 366.66 (d) 2

9. $\sqrt{\dfrac{1.21\times 0.9}{1.1\times 0.11}} = ?$

(a) 2 (b) 3

(c) 9 (d) 11

10. $\sqrt{0.01+\sqrt{0.0064}} = ?$

(a) 0.03 (b) 0.3

(c) $0.3\sqrt{2}$ (d) 0.003

11. वह संख्या कौन-सी है जिसका वर्ग 975 तथा 585 के वर्गों के अन्तर के बराबर है?

(a) 130 (b) 390

(c) 780 (d) 1560

12. यदि $\sqrt{5} = 2.24$ तथा $\sqrt{6} = 2.45$ हो, तो $\sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{5}{6}}$ का मान है—

(a) 1.37 (b) 1.57

(c) 1.73 (d) 1.75

13. $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ का मान है—

(a) $2\frac{1}{2}$ (b) $3\frac{1}{2}$

(c) $4\frac{1}{2}$ (d) $5\frac{1}{2}$

14. 920 में कम से कम क्या जोड़े कि योगफल एक पूर्ण वर्ग हो?

(a) 31 (b) 39

(c) 41 (d) 49

15. $(4)^2 + (3)^2 = \sqrt{?}$

(a) 5 (b) 25

(c) 625 (d) 425

निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए—

16. गुणनखण्ड विधि से निम्नांकित के वर्गमूल ज्ञात कीजिए—

(i) 15876 (ii) 148225

(iii) 69696

17. भाग विधि से निम्नांकित के धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

(i) 4225 (ii) 75625

(iii) 3915380329

18. एक टोकरी में 1250 फूल हैं। एक व्यक्ति किसी नगर के प्रत्येक मन्दिर में उतने ही फूल चढ़ाता है, जितने कि उस नगर में मन्दिर है। यदि उसने कुल 8 टोकरी फूल चढ़ाये हो, तो बताइए कि उस नगर में कुल कितने मन्दिर हैं?

19. 15 अगस्त को कक्षा 8 की प्रत्येक छात्रा को उतने ही ग्राम मिठाई दी गई, जितनी कि उस कक्षा में छात्राएँ थीं। यदि कुल 1.6 किलोग्राम मिठाई बाँटी गई हो, तो ज्ञात कीजिए कि उस कक्षा में कुल कितनी छात्राएँ हैं और प्रत्येक छात्रा को कितने डेकाग्राम मिठाई मिली।

20. एक वर्गाकार बाग को स्वच्छ, निर्मल एवं प्रदूषण मुक्त बनाने के लिए रख-रखाव पर प्रति वर्ग मीटर ` 2.25 मासिक व्यय आता है। यदि बाग के रख-रखाव पर मासिक व्यय ` 3600 हो, तो बाग की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-4

पूर्ण घन संख्याओं तथा पूर्ण घन दशमलव संख्याओं का घनमूल

पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल (गुणनखण्ड विधि द्वारा)

देखिए,

(i) $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3, \sqrt[3]{27} = 3$

(ii)
$$216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$$
$$= 2^3 \times 3^3$$
$$= (2 \times 3)^3$$

अत : $\sqrt[3]{216} = 2 \times 3 = 6$

या, $216 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3}$

अत : $\sqrt[3]{216} = 2 \times 3 = 6$

(iii) $1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$
$$= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$$
$$= (2 \times 2 \times 3)^3$$

2	1728
2	864
2	432
2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
	3

अतः $\sqrt[3]{1728} = 2 \times 2 \times 3 = 12$

इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी पूर्णघन संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए वह संख्या ज्ञात करनी चाहिए जिसका घन करने पर उक्त संख्या प्राप्त हो जाय।

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त विधि से 2744, 4099, 8000 तथा 91125 के घनमूल ज्ञात कीजिए।

इस प्रकार पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित क्रिया-पद का अनुसरण करना चाहिए :

1. सर्वप्रथम दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।
2. समान गुणनखण्डों के 3-3 के समूह (त्रिक) बनाइए।
3. प्रत्येक त्रिक से एक गुणनखण्ड लीजिए।
4. इन गुणनखण्डों का आपस में गुणा कीजिए।
5. प्राप्त गुणनफल दी हुई संख्या का अभीष्ट घनमूल होगा।

टिप्पणी : ध्यान दें, संख्याएँ तभी पूर्ण घन होती है जब उनके अभाज्य गुणनखण्डों में समान गुणनखण्डों के सभी संभव त्रिक **(Triplets)** बनाने के पश्चात् कोई भी गुणनखण्ड शेष न रहे अन्यथा वह संख्या पूर्ण घन नहीं होगी।

उदाहरण 3. 157464 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $157464 = \overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}$

अतः $\sqrt[3]{157464} = 2\times3\times3\times3 = 54$

2	157464
2	78732
2	39366
3	19683
3	6561
3	2187
3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
	3

उदाहरण 4.43200 को पूर्ण घन बनाने के लिए इसमें किस छोटी से छोटी संख्या का गुणा करना चाहिए? इस प्रकार प्राप्त पूर्ण घन संख्या का घनमूल भी ज्ञात कीजिए।

हल : $43200 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3} \times 5 \times 5$

हम देखते हैं कि समान गुणनखण्डों के 3-3 के समूह (त्रिक) बनाने पर 5 × 5 बच जाता है। अतः यदि एक और 5 का दी हुई संख्या में गुणा कर दिया जाय तो वह संख्या पूर्ण घन बन जायेगी। अतः गुणा की जाने वाली संख्या = 5

इस प्रकार प्राप्त पूर्ण घन संख्या = 43200 × 5 = 216000

2	43200
2	21600
2	10800
2	5400
2	2700
2	1350
3	675
3	225
3	75
5	25
	5

अब $216000 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3} \times \overline{5 \times 5 \times 5}$

अतः $\sqrt[3]{216000} = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$

उदाहरण 5. 13122 में किस छोटी से छोटी संख्या का भाग दें कि भागफल पूर्ण घन बन जाय? इस प्रकार प्राप्त संख्या का घनमूल भी ज्ञात कीजिए।

हल : $13122 = 2 \times 3 \times 3 \times \overline{3 \times 3 \times 3} \times \overline{3 \times 3 \times 3}$

यहाँ समान गुणनखण्डों के 3-3 के समूह (त्रिक) बनाने के बाद तीन गुणनखण्ड 2, 3, 3 बच जाते हैं। अतः दी हुई संख्या में यदि 2 × 3 × 3 = 18 का भाग दे दें तो भागफल पूर्ण घन होगा।

इस प्रकार भाजक संख्या = 18 और

प्राप्त संख्या $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$

$\because\ 729 = \overline{3 \times 3 \times 3} \times \overline{3 \times 3 \times 3}$

$\therefore\quad \sqrt[3]{729} = 3 \times 3 = 9$

पूर्ण घन ऋण पूर्णांकों का घनमूल :

देखिए,

$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (1) = -1,$ अतः $\sqrt[3]{-1} = -1$

$(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = -8,$ अतः $\sqrt[3]{-8} = -2$

$(-3)^3 = (-3) \times (-3) \times (-3) = -27,$ अतः $\sqrt[3]{-27} = -3$

$(-4)^3 = (-4) \times (-4) \times (-4) = -64,$ अतः $\sqrt[3]{-64} = -4$

इसी प्रकार यदि $(-x)$ एक ऋण पूर्णांक हो, तो

$(-x)^3 = (-x) \times (-x) \times (-x) = -x^3$

अतः $\sqrt[3]{-x^3} = -x$

दिखाइए कि $-1331 = (-11)^3$

जाँच कीजिए कि कथन $\sqrt[3]{-1000} = -10$ सत्य है।

दिखाइए कि (−125) का घनमूल (−5) है।

इस प्रकार यह निष्कर्ष निकलता है कि

पूर्ण घन ऋण पूर्णांक का घनमूल ऋण पूर्णांक होता है। इसे पूर्ण घन ऋण पूर्णांक के निरपेक्ष मान के घनमूल के पूर्व ऋण चिन्ह लगाकर प्राप्त किया जा सकता है, संकेत रूप में

$\sqrt[3]{-x^3} = -x = -\sqrt[3]{x^3}$

उदाहरण 6. -2197 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$2197 = \overline{13 \times 13 \times 13}$

$\therefore\quad \sqrt[3]{2197} = 13$

अतः $\sqrt[3]{-2197} = -\sqrt[3]{-2197} = -13$

दो पूर्ण घन पूर्णांकों के गुणनफल का घनमूल :

देखिए,

उदाहरण 7. निम्न में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए और उत्तर पर ध्यान दीजिए।

(क) $\sqrt[3]{27 \times 64}$

(ख) $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64}$

हल : (क) $\sqrt[3]{27 \times 64}$

$$\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{\overline{3 \times 3 \times 3}}$$
$$\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{\overline{4 \times 4 \times 4}}$$

$$\sqrt[3]{27 \times 64} = \sqrt[3]{\overline{3 \times 3 \times 3} \times \overline{4 \times 4 \times 4}}$$
$$= 3 \times 4 = 12$$

(ख) $\sqrt[3]{27} = 3$ और $\sqrt[3]{64} = 4$

$$\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64} = 3 \times 4 = 12$$

दोनों दशाओं में समान उत्तर है।

इसी प्रकार,

$8 = \overline{2 \times 2 \times 2} = 2^3$, अतः $\sqrt[3]{8} = 2$

$27 = \overline{3 \times 3 \times 3} = 3^3$, अतः $\sqrt[3]{27} = 3$

अब $8 \times 27 = \overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3}$

अतः $\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{\overline{2 \times 2 \times 2} \times \overline{3 \times 3 \times 3}}$
$= 2 \times 3 = 6$

अतः $\sqrt[3]{8 \times 27} = 6 = 2 \times 3 = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27}$

अर्थात् $\sqrt[3]{8 \times 27} = \sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{27}$

पुनः देखिए,

उदाहरण 8. $-64 = -(\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2})$ अतः $\sqrt[3]{-64} = -(\overline{2\times2}) = -4$

$729 = \overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}$, अतः $\sqrt[3]{729} = 3\times3 = 9$

अब $\sqrt[3]{-64\times729}$

$$\sqrt[3]{-64\times729} = \sqrt[3]{\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}}$$
$$\sqrt[3]{(-64)\times729} = -\sqrt[3]{\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}} = -2\times2\times3\times3$$
$$= -36$$
$$= -4\times9$$
$$\sqrt[3]{-64}\times\sqrt[3]{729} = -4\times9$$
$$= -36$$

अतः $\sqrt[3]{-64\times729} = \sqrt[3]{-64}\times\sqrt[3]{729}$

प्रयास कीजिए :

(i) $\sqrt[3]{125\times216} = \sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{216}$

(ii) $\sqrt[3]{343\times512} = \sqrt[3]{343}\times\sqrt[3]{512}$

इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि :

यदि a और b दो पूर्ण घन पूर्णांक हों, तो

$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$

उदाहरण 9. $(-125)\times(-2744)$ का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -\sqrt[3]{5\times5\times5} = -5$

और $\sqrt[3]{-2744} = -\sqrt[3]{2744} = -\sqrt[3]{2\times2\times2\times7\times7\times7}$
$= -(2\times7) = -14$

अतः $\sqrt[3]{(-125)\times(-2744)} = \sqrt[3]{-125}\times\sqrt[3]{-2744}$
$= (-5)\times(-14)$
$= 70$

परिमेय संख्या, जिसका अंश और हर पूर्ण घन हो, का घनमूल

देखिए,

$$\frac{343}{512} = \frac{7\times7\times7}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}$$
$$= \frac{7^3}{2^3\times2^3\times2^3}$$
$$= \frac{7^3}{8^3} = \left(\frac{7}{8}\right)^3$$

अतः $\sqrt[3]{\frac{343}{512}} = \frac{7}{8}$

पुनः देखिए

$$\frac{-125}{1728} = \frac{(-5)\times(-5)\times(-5)}{2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3}$$
$$= \frac{(-5)^3}{2^3\times2^3\times3^3}$$
$$= \frac{(-5)^3}{(2\times2\times3)^3}$$
$$= \frac{(-5)^3}{(12)^3} = \left(\frac{-5}{12}\right)^3$$

अतः $\sqrt[3]{\frac{-125}{1728}} = \frac{-5}{12}$

इन्हें देखिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

- **अंश तथा हर के अभाज्य गुणनखण्ड करके दिखाइए कि निम्नांकित परिमेय संख्याएँ पूर्ण घन संख्याएँ हैं, तथा इस प्रकार इनका घनमूल ज्ञात कीजिए :**

  (i) $\frac{-125}{1331}$

  (ii) $\frac{64}{125}$

  (iii) $\frac{216}{343}$

देखिए,

$$\frac{27}{125} = \frac{3\times3\times3}{5\times5\times5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$$

अतः $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{3}{5}$

पुनः $27 = 3\times3\times3 = 3^3$

अतः $\sqrt[3]{27} = 3$

इसी प्रकार $125 = 5\times5\times5 = 5^3$

अतः $\sqrt[3]{125} = 5$

अतः $\sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$

प्रयास कीजिए :

सत्यापित कीजिए :

(i) $\sqrt[3]{\frac{512}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{100}}$

(iii) $\sqrt[3]{\frac{-729}{1331}} = \frac{\sqrt[3]{-729}}{\sqrt[3]{1331}}$

निष्कर्ष :

यदि $\frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या हो, जहाँ a और b सह-अभाज्य पूर्ण घन पूर्णांक हैं तथा $b \neq 0$, तो $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$

दशमलव संख्या, जो पूर्ण घन संख्या हो, का घनमूल (गुणनखण्ड विधि द्वारा)

देखिए,

$$(0.6)^3 = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \frac{6}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{6}{10} = \frac{6\times6\times6}{10\times10\times10} = \frac{216}{1000} = 0.216$$

अर्थात्, $(0.6)^3 = 0.216$

अतः $\sqrt[3]{0.216} = 0.6$

इसी प्रकार,

$$(1.2)^3 = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \frac{12}{10}\times\frac{12}{10}\times\frac{12}{10} = \frac{1728}{1000} = 1.728$$

अतः $\sqrt[3]{1.728} = 1.2$

हम जानते हैं कि दशमलव संख्या को साधारण भिन्न में बदल सकते हैं, अतः यदि हमें 0.216 का घनमूल ज्ञात करना है, तो हम इसे निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं—

$$\sqrt[3]{0.216} = \sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{1000}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}}}{\sqrt[3]{10\times10\times10}} = \frac{2\times3}{10}$$
$$= \frac{6}{10} = 0.6$$

अतः $\sqrt[3]{0.216} = 0.6$

इसी प्रकार,

$$\sqrt[3]{1.728} = \sqrt[3]{\frac{1728}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{1000}}$$
$$= \frac{\sqrt[3]{\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}}}{\sqrt[3]{10\times10\times10}}$$
$$= \frac{2\times2\times3}{10} = \frac{12}{10} = 1.2$$

अतः $\sqrt[3]{1.728} = 1.2$

प्रयास कीजिए :

- दिखाइए कि : $\sqrt[3]{0.027} = 0.3$
- 0.008 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 10. $29\frac{791}{1000}$ का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $29\frac{791}{1000} = \frac{29791}{1000} = \frac{31 \times 31 \times 31}{10 \times 10 \times 10}$

अतः $\sqrt[3]{29\frac{791}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{31 \times 31 \times 31}}{\sqrt[3]{10 \times 10 \times 10}}$

$= \frac{31}{10}$ अथवा 3.1

संयुक्त भिन्न को विषम भिन्न में बदल कर घनमूल ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 11. 15.625 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : $15.625 = \frac{15625}{1000}$

अतः $\sqrt[3]{15.625} = \sqrt[3]{\frac{15625}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{\overline{5 \times 5 \times 5} \times \overline{5 \times 5 \times 5}}}{\sqrt[3]{10 \times 10 \times 10}}$

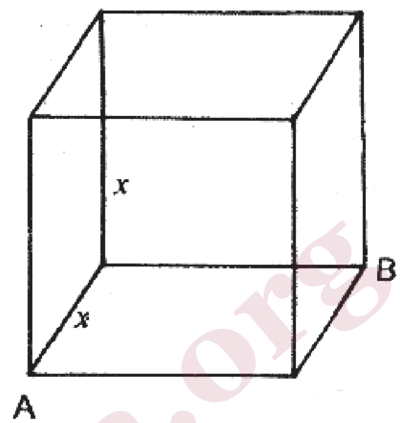
$= \frac{5 \times 5}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$

घन का आयतन और उसकी भुजा में सम्बन्ध :

हम जानते हैं कि घन वह घनाभ होता है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई आपस में बराबर होती हैं। अर्थात् घन की भुजाएँ या कोरें बराबर माप की होती हैं। हम यह भी जानते हैं कि यदि ekeâvee leve keâer Yegpee x और उसका आयतन V हो, तो

$V = x \times x \times x = x^3$

अर्थात् घन का आयतन उसकी भुजा के घन के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में, घन की भुजा उसके आयतन के घनमूल के बराबर होती है।



इस प्रकार, $V = x^3$

या, $x = \sqrt[3]{V}$

अर्थात् A

घन का आयतन = (घन की भुजा)^3

घन की भुजा $= \sqrt[3]{\text{का घन आयतन}}$

सामूहिक चर्चा कीजिए :

1. $\frac{1}{27}$ का घनमूल बताइए।

2. $\frac{64}{125}$ का घनमूल कितना होगा?

3. .001 का घनमूल क्या होगा?

4. .027 का घनमूल बताइए।

घनमूल का व्यावहारिक प्रश्नों में अनुप्रयोग :

भवन-निर्माण, वस्तुओं की पैकिंग, पानी की टंकियों के निर्माण, सजावट आदि दैनिक जीवन की ऐसी अनेक समस्याएँ हैं जिनका समाधान ढूँढने में घनमूल का ज्ञान उपयोगी सिद्ध हो सकता है। निम्नांकित उदाहरणों द्वारा ये बातें स्पष्ट की जा रही हैं।

उदाहरण 12. एक धातु की ठोस आयताकार सिल्ली की माप 10 सेमी ×4 सेमी × 1.6 सेमी है। इसको पिघलाकर एक दूसरी ठोस घनाकार सिल्ली बनायी जाती है। बताइये कि इस नयी सिल्ली की भुजा की माप कितनी होगी।

हल : आयताकार सिल्ली का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

$= 10 \times 4 \times 1.6 = 64$ सेमी^{3}

यदि एक नई घनाकार सिल्ली की एक भुजा x सेमी हो तो

इसका आयतन $= x \times x \times x$ सेमी^{3}

प्रश्नानुसार $x^3 = 64$

$x = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 4$

अतः नयी सिल्ली की भुजा 4 सेमी होगी।

उदाहरण 13. एक फल-निर्यातक घनाकार पेटियों में सेबों की पैकिंग इस प्रकार कराता है कि एक पंक्ति में जितने सेब रखे जाते हैं, पेटी में सेबों की उतनी ही पंक्तियाँ हैं तथा सेबों की उतनी ही तहें भी रखी जाती हैं। यदि एक पेटी में 3375 सेब रखे गये हों तो ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक पंक्ति में कितने सेब रखे गये हैं?

हल : चूँकि पेटी में प्रत्येक पंक्ति में जितने सेब रखे गये हैं, सेबों की उतनी ही पंक्तियाँ तथा उतनी ही तहें हैं, अतः यदि एक पंक्ति में x सेब रखे गये हों तो पेटी में रखे गये।

nesyeeW/keâer nebKÙee $= x \times x \times x = x^3$

प्रश्नानुसार पेटी में 3375 सेब रखे गये हैं,

चूँकि $x^3 = 3375$

अतः
$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{3375} \\ &= \sqrt[3]{\overline{3 \times 3 \times 3} \times \overline{5 \times 5 \times 5}} \\ &= 3 \times 5 \\ &= 15 \end{aligned}$$

अतः प्रत्येक पंक्ति में 15 सेब रखे गये हैं।

विशेष : कुछ संख्याएँ ऐसी हैं जिन्हें दो घनों के योगफल के रूप में दो भिन्न प्रकार से लिखा जाता है। 1729 ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों के योगफल के रूप में केवल दो प्रकार से लिखा जा सकता है। इसे रामानुजन हार्डी संख्या कहते हैं।

$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$

$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$

मूल्यांकन

निम्नलिखित प्रश्नों में से प्रत्येक में सही उत्तर को चिन्हांकित (✓) कीजिए—

1. $\sqrt[3]{19683} = ? \times 3$

   (a) 3 (b) 18
   (c) 27 (d) 90

2. $\sqrt[3]{15625} = ?$

(a) 225 (b) 25
(c) 215 (d) 15

3. $\sqrt[3]{4+\frac{12}{125}} = ?$

(a) $1\frac{2}{5}$ (b) $1\frac{3}{5}$
(c) $1\frac{4}{5}$ (d) $2\frac{2}{5}$

4. $\sqrt[3]{.000216} = ?$

(a) 0.6 (b) 0.06
(c) 0.006 (d) 0.0006

5. $\sqrt[3]{\sqrt{0.000729}} + \sqrt[3]{0.008} = ?$

(a) 0.1 (b) 0.5
(c) 0.6 (d) 0.8

6. 675 को किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा किया जाये कि गुणनफल एक पूर्ण घन हो जाए?

(a) 5 (b) 6
(c) 7 (d) 8

7. 3600 को किस छोटी से छोटी संख्या से भाग दिया जाये कि भागफल एक पूर्ण घन हो?

(a) 9 (b) 50
(c) 300 (d) 450

8. 4 अंकों की वह बड़ी से बड़ी कौन-सी संख्या है जो पूर्ण घन हो?

(a) 9999 (b) 9261
(c) 8000 (d) 8962

9. $\sqrt[3]{0.000001} = ?$

(a) 0.1 (b) 0.01
(c) 0.001 (d) 0.0001

10. 1029 को किस छोटी से छोटी संख्या से गुणा करने पर प्राप्त संख्या एक पूर्ण घन होगी?

(a) 4 (b) 9
(c) 7 (d) 25

11. एक घनात्मक सन्दूक का आयतन 13.824 घन सेमी. है। इसकी प्रत्येक भुजा की लम्बाई कितनी है?

(a) 3.8 सेमी. (b) 4.8 सेमी.

(c) 2.4 सेमी. (d) 2.8 सेमी.

12. $\sqrt[3]{2197} = ?$

(a) 12 (b) 13

(c) 14 (d) 15

13. $\sqrt[3]{4913} = ?$

(a) 16 (b) 17

(c) 18 (d) 19

14. $\sqrt[3]{0.000512} = ?$

(a) 0.06 (b) 0.07

(c) 0.08 (d) 0.09

15. $\sqrt[3]{002197} = ?$

(a) 0.12 (b) 0.13

(c) 0.14 (d) 0.15

निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए :

16. निम्नांकित का घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{729}{1331}$ (ii) $5\frac{23}{64}$

17. निम्नांकित दशमलव संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 1.331 (ii) 0.000729

18. एक घनाकार कम्पोस्ट खाद के गड्ढे का आयतन 13.824 मी^{3} है। गड्ढे की गहराई ज्ञात कीजिए।

19. एक पेटी में 216 आम घन के रूप में सजाकर रखे गये हैं। ज्ञात कीजिए कि पेटी में आम की कितनी तहें हैं?

20. एक सन्दूक में चाक के डिब्बे घन के रूप में रखे गये हैं। यदि कुल डिब्बों की संख्या 2744 हो, तो सन्दूक में एक तह में चाक के कितने डिब्बे हैं?

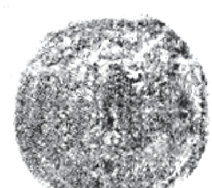
———

इकाई-5

किसी सिक्के के उछालने पर चित या पट के ऊपर पड़ने की सम्भावना का सम्बोध

किसी सिक्के के उछालने पर शीर्ष (चित) या पूँछ (पट) के ऊपर आने की संभावना का बोध :

क्या आपको पता है कि क्रिकेट मैच का प्रारम्भ सिक्का उछालने से होता है जिसे हम टॉस (Toss) करना कहते हैं। टॉस जीतने वाले को सबसे पहले बैटिंग या फील्डिंग करने का अधिकार मिल जाता है। सिक्का उछालने के पूर्व एक टीम का कप्तान सिक्के का शीर्ष चुनता है तथा दूसरा सिक्के की पूँछ। शीर्ष को चित तथा पूँछ को पट भी कहते हैं। अंग्रेजी में शीर्ष और पूँछ को क्रमशः Head और Tail कहते हैं। संक्षेप में शीर्ष को H तथा पूँछ को T से प्रदर्शित करते हैं। दोनों पक्षों के कप्तानों द्वारा शीर्ष एवं पूँछ का चयन कर लेने के बाद सिक्का उछाला जाता है। सिक्का उछालने के पूर्व यह किसी कप्तान को सुनिश्चित नहीं होता कि वह टॉस जीत ही जायेगा। उसका टॉस जीतना एक संयोग (Chance) है। टॉस जीतने की लालसा तो दोनों कप्तानों के मन में विद्यमान रहती है, किन्तु परिणाम किसके पक्ष में जायेगा यह कोई नहीं जानता। कभी-कभी ऐसा होता है कि किसी मैच सीरीज में एक ही पक्ष का कप्तान टॉस बार-बार जीत जाता है। अतः सिक्का उछालने के परिणाम सदा अनिश्चित रहता है। बस, इतना ही सुनिश्चित होता है कि सिक्का उछालने पर या तो शीर्ष ऊपर आयेगा अथवा पूँछ। यहाँ एक संकल्पना की जा सकती है कि यदि सिक्का प्रत्येक प्रकार से निर्दोष है, सिक्का उछालने के दौरान सिक्के पर उसके भार के अतिरिक्त किसी अन्य बल का प्रभाव नहीं पड़ रहा हो तथा सिक्का उछालने वाला व्यक्ति किसी प्रकार का पक्षपात नहीं कर रहा हो तो सिक्का उछालने पर शीर्ष और पूँछ के ऊपर आने की सम्भावनाएँ बराबर होंगी। अर्थात् शीर्ष के ऊपर आने का संयोग उतना ही बनता है जितना कि पूँछ के ऊपर आने का संयोग।



शीर्ष

विचार कीजिए कि सिक्का उछालने का प्रयोग और कहाँ-कहाँ किया जाता है?

किसी चुनाव की मतगणना में दोनों पक्षों के बराबर मत पड़े हों तो टॉस द्वारा हार-जीत का निर्णय किया जाता है। क्रिकेट के अतिरिक्त कुछ अन्य खेलों में भी टॉस किया जाता है।

पूँछ

पार्श्वांकित चित्र में एक रुपये के सिक्के के शीर्ष और पूँछ को दर्शाया गया है। किसी सिक्के का वह पृष्ठ जिस पर अशोक स्तम्भ बना होता है, उसे शीर्ष (चित्त) तथा उसके विपरीत पृष्ठ को पूँछ (पट) कहते हैं।

ध्यान देने योग्य है कि सिक्का उछालने पर ऊपर चित या पट ही आता है। ऐसा संयोग लगभग नगण्य ही है कि सिक्का अपने वक्रीय कोर पर संतुलित हो जाय।

स्वयं करके देखिए

क्रिया-कलाप-1

आप एक सिक्के को 10 बार, 20 बार, 30 बार, 40 बार, 50 बार, 75 बार तथा 100 बार उछाल कर यह देखें कि विभिन्न दशाओं में शीर्ष और पूँछ कितनी बार आते हैं। उसे निम्नांकित सारणी में लिखते जायें।

सिक्क के उछालों की संख्या	शीर्ष आने की संख्या	पूँछ आने की संख्या
10		
20		
30		
40		
50		
75		
100		

आप देख सकते हैं कि सिक्के के उछालों की संख्या अधिक हो जाने पर शीर्ष एवं पूँछ आने की संख्या लगभग बराबर है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि जैसे-जैसे उछालों की संख्या बढ़ती जाती है वैसे-वैसे शीर्ष और पूँछ के ऊपर आने की संख्याएँ लगभग बराबर होती जाती हैं।

निम्नांकित सारणी को देखिए—

सिक्का के उछालों की संख्या	शीर्ष आने की संख्या	पट आने की संख्या
10	7	3
20	11	9
30	14	16
40	18	22
50	23	27
75	35	40
100	48	52

यह सारणी एक वास्तविक प्रयोग के आधार पर तैयार की गई है। सिक्के के 100 उछाल में यह पाया गया है कि 48 बार शीर्ष पड़ा तथा 52 बार पूँछ।

कक्षा में सभी शिक्षार्थी एक ही आकार-प्रकार का एक रुपये का सिक्का लेकर इस प्रयोग को दुहरा सकते हैं। ऐसे प्रयोगों के लिए सिक्के का एक ही आकार प्रकार तथा एक ही मूल्य का होना आवश्यक है। ऐसा होने से यह माना जा सकता है कि सभी शिक्षार्थी एक सिक्का लेकर उछाल रहे हैं। शीर्ष और पूँछ ऊपर आने की संख्याओं को गिनकर शिक्षार्थी नई सारणियाँ तैयार करें। भिन्न-भिन्न आकार-प्रकार तथा असमान मूल्य के सिक्के लेकर उछालने पर शीर्ष और पूँछ के ऊपर आने की संख्याएँ प्रभावित हो सकती हैं। इन प्रयोगों के आधार पर आप देखेंगे कि उछालों की संख्या जैसे-जैसे बढ़ती जाती है (अधिक से अधिक होती जाती है), वैसे-वैसे शीर्ष या पूँछ के ऊपर आने की संख्या लगभग बराबर होती जाती है।

किसी सिक्के को उछालने पर शीर्ष या पूँछ के ऊपर आने की संभावना समान होती है।

आप जानते हैं कि दैनिक जीवन में ऐसे कई क्रिया-कलाप करते हैं जिन्हें बार-बार दुहराने पर भी उनके परिणाम कभी नहीं बदलते, जैसे शिक्षार्थी चाहे जिस प्रकार के त्रिभुज अपनी लेखन पुस्तिकाओं में खींचे, उन सभी त्रिभुजों के अन्तः कोणों का योग सदैव दो समकोण के बराबर ही आयेगा। इन प्रयोगों के परिणाम संयोग पर निर्भर नहीं होते किन्तु सिक्का उछालने पर प्राप्त होने वाले परिणाम सदैव संयोग पर निर्भर होते हैं, चाहे प्रत्येक बार प्रयोग की परिस्थितियाँ एक समान ही क्यों न हों।

संयोग पर निर्भर एक अन्य प्रयोग पाँसा फेंकने का है, जिसकी चर्चा आगे की जायेगी। सिक्का उछालने या पाँसा फेंकने के प्रयोग 'यदृच्छया (Random) प्रयोग' कहलाते हैं। संभावनाओं की सांख्यिकी में इन्हीं प्रयोगों का अध्ययन किया जाता है। आप देख सकते हैं कि यदृच्छया प्रयोगों को बार-बार दुहराने पर इनके परिणाम बदल जाते हैं।

मूल्यांकन

1. एक सिक्के के कितने तल होते हैं?
2. सिक्का का कौन-सा तल शीर्ष तथा कौन सा तल पूँछ होता है?
3. सिक्का उछालने पर कितने तल एक साथ ऊपर आ सकते हैं?
4. क्रिकेट के मैच का प्रारम्भ किस वस्तु के उछालने से होता है?
5. एक सिक्का कई बार उछाल कर उसके शीर्ष (चित) तथा पूँछ (पट) आने की संख्या निम्नांकित सारणी में लिखी गयी है। अपनी अभ्यास पुस्तिका में सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

सिक्का के उछालों की संख्या	चित आने की संख्या	पट आने की संख्या
20	12	–
30	–	17
–	22	18
–	32	28
n	m	–

———

इकाई-6

किसी पाँसे को उछालने पर किसी एक फलक के ऊपर आने की संभावना

क्या आपने कभी लूडो अथवा साँप-सीढ़ी वाला खेल खेला अथवा देखा है? इस खेल को खेलने के लिए किन खेल सामग्रियों का प्रयोग किया जाता है।

खेल खेलने के लिए लघु आकार का संतुलित घन जैसा ठोस गुटका होता है जिसे पाँसा **(DIE)** कहते हैं। यह समांगी **(Homogeneous)** होता है तथा इसके छह फलकों पर 1 से 6 तक की संख्याएँ (पूर्णांक) अंकित होती है। ध्यान देने योग्य है कि एक फलक पर केवल एक ही संख्या अंकित होती है। कभी-कभी फलकों पर संख्या के स्थान पर बिन्दु अंकित होते हैं। खेल कम से कम दो प्रतिभागियों के बीच खेला जा सकता है। खेल खेलने के लिए सभी प्रतिभागी क्रम से पाँसे को क्षैतिज तल पर फेंकते हैं।

करके देखिए

समांगी पाँसे को फेंक कर देखिए कि :

(1) पाँसे के कितने फलक एक साथ ऊपर आ जाते हैं?

(2) पाँसे को कई बार फेंक कर देखिए कि क्या एक ही संख्या बार-बार ऊपर आ जाती है? अथवा क्या कोई विशेष संख्या कभी भी ऊपर नहीं आती?

आप पाँसे को 10, 20, 30, ... 1000, ... बार फेंक कर देख सकते हैं कि कभी भी पाँसे के दो फलक एक साथ ऊपर नहीं आ सकते।

पाँसे का कोई भी फलक जब ऊपर आता है, तो वह शेष पाँचों फलकों को ऊपर आने से रोक देता है। साथ ही समाँगी पाँसे के सभी फलकों के ऊपर आने की संभावना या संयोग समान रहता है। सिक्का उछालने की भाँति ही जब पाँसा फेंका जाता है तब भी परिणाम सदैव अनिश्चित ही होता है। ऐसा सुनिश्चित नहीं होता कि कई बार पाँसा फेंकने पर पाँसे के फलकों पर अंकित संख्याएँ किसी निश्चित क्रम में ऊपर आयें। हर बार परिणाम बदल सकता है, तथा कभी-कभी एक संख्या ही कई बार ऊपर आ सकती है किन्तु यदि पाँसा फेंकने की संख्या बढ़ाते जायँ, तथा हर बार पाँसे के ऊपर आने वाली संख्याओं की संख्या लिख ली जाय तो यह देखा जा सकता है कि पाँसे पर ऊपर आने वाली संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 की संख्या आपस में लगभग बराबर होने के समीप पहुँचती जाती हैं।

करके देखिए

क्रिया-कलाप-2

उपर्युक्त तथ्य के परीक्षण हेतु आप एक पाँसे को 30 बार, 60 बार, 90 बार फेंक कर पाँसे पर जो संख्या जितनी बार ऊपर आती है, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6 जितनी बार आती है, उसे निम्नांकित प्रारूप की सारणी में लिखते जायँ।

सारणी

पाँसा फेंकने की संख्या	पाँसे पर इन अंकों के ऊपर आने की संख्या					
	1	2	3	4	5	6
30						
60						
90						

आप देख सकते हैं कि पाँसे के अधिक बार फेंकने पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 में प्रत्येक के ऊपर आने की संख्या लगभग बराबर है।

इस क्रिया कलाप में पाँसा फेंकने की संख्या जितना अधिक बढ़ाते जायेंगे, प्रेक्षणों में इन संख्याओं (1, 2, 3, 4, 5, 6) में प्रत्येक के ऊपर आने की संख्या उतनी ही अधिक शुद्धता के साथ लगभग बराबर होती चली जाती है। अतः सिक्के की तरह ही पाँसे को भी कई बार फेंकने पर आप यह अनुभव करेंगे कि पाँसे के फलकों पर अंकित अंकों या बिन्दुओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में सभी के ऊपर आने की सम्भावना लगभग बराबर होती है। स्पष्टतः प्रक्षेपण के परिणाम स्वरूप यहाँ कुल छह ढंगों में पाँस के फलक के ऊपर आने की सम्भावना बराबर होती है।

इस प्रकार हम निम्नांकित निष्कर्ष पर पहुँचते हैं :

किसी समांगी पाँसे को फेंकने पर उस पर अंकित संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक के ऊपर आने की सम्भावना समान होती है।

पाँसा फेंकने का सामूहिक क्रिया-कलाप भी किया जा सकता है। इसके लिए कक्षा के शिक्षार्थियों को 5 छोटे-छोटे वर्गों में विभाजित कर दिया जाय। प्रत्येक वर्ग को एक पाँसा 30 बार फेंकने के लिए कहा जाय। अच्छा होगा कि वर्ग का एक सदस्य पाँसा फेंके तथा दूसरे सदस्य सावधानी पूर्वक पाँसे पर ऊपर आने वाली संख्याओं की संचयी संख्या को निम्नांकित सारणी में अंकित करें।

वर्ग	एक वर्ग में एक पाँसे के फेंके जाने की कुल संख्या	पाँसे पर इन अंकों के ऊपर आने की वर्गवार संचयी संख्या					
		1	2	3	4	5	6
1.	30						
2.	30						
3.	30						
4.	30						
5.	30						
	योग = 150						

उपर्युक्त सारणी में योग संचयी संख्याओं को ध्यानपूर्वक देखा जाय। देखने से यह परिणाम प्राप्त होगा कि सभी अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 के योग संचयी संख्याओं में अन्तर पर्याप्त कम है। दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि इन अंकों की योग संचयी संख्याएँ आपस में लगभग समान हैं।

उपर्युक्त सामूहिक क्रिया-कलाप में एक बात का ध्यान सावधनी पूर्वक रखना होगा कि सभी वर्गों में प्रयुक्त पाँसे समान आकार-प्रकार के होने चाहिए जिससे यह मान लिया जा सके कि सभी वर्गों में फेंके गये पाँसे एक ही पासा है।

अब तक की चर्चा से यह बात शिक्षार्थियों को स्पष्ट हो चुकी होगी कि किसी पाँसे के फेंकने पर केवल कुल छह परिणाम ही प्राप्त होते हैं यथा 1, 2, 3, 4, 5, 6 का सम संभावी ढंग से ऊपर आना। अर्थात् इन सभी छह परिणामों के प्राप्त होने की सम्भावना समान होती है।

मूल्यांकन

1. एक समांगी पाँसे की कितनी फलकें होती हैं?
   जब कोई पाँसा फेंका जाता है तो उसकी कितने फलकें ऊपर आती है?
2. एक समांगी पाँसे के 48 बार फेंकने पर प्रत्येक फलक के ऊपर अपने की सम्भावनाओं को समान मान लेने पर ज्ञात कीजिए कि अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक कितनी बार ऊपर आयेगा?
3. एक समांगी पाँसे को 54 बार फेंकने पर यह पाया गया कि सम अंकों के ऊपर आने की संख्या 25 है। तो ज्ञात कीजिए कि विषम अंकों के ऊपर आने की कुल संख्या कितनी होगी?

———

इकाई-7

दो या तीन सिक्कों को एक साथ फेंकने का प्रयोग

अब दो सिक्कों को एक साथ कई बार फेंक कर ऊपर शीर्ष या पूँछ आने की स्थितियों का अवलोकन कीजिए। आप देखेंगे कि—

(1) दोनों सिक्कों में ऊपर शीर्ष आते हैं।

(2) प्रथम सिक्के में ऊपर शीर्ष तथा दूसरे सिक्के में ऊपर पूँछ आता है।

(3) प्रथम सिक्के में ऊपर पूँछ तथा दूसरे सिक्के में ऊपर शीर्ष आता है।

(4) दोनों सिक्कों में ऊपर पूँछ आते हैं।

शीर्ष के लिए H तथा पूँछ के लिए T संकेताक्षरों का प्रयोग कर उपर्युक्त चारों दशाएँ H H, H T, T H और T T से प्रदर्शित की जा सकती हैं।

दो सिक्कों को एक साथ लेकर जब भी उछाला जायेगा तो इन्हीं चार परिणामों में से कोई एक परिणाम प्राप्त होगा और अवश्य प्राप्त होगा। इन परिणामों के अतिरिक्त कोई अन्य परिणाम प्राप्त नहीं हो सकता। जानने योग्य है कि इन चार परिणामों H H, H T, T H और T T में से प्रत्येक के प्राप्त होने की संभावना समान है। यह भी ध्यान देने योग्य है कि H T और T H दोनों भिन्न-भिन्न परिणाम हैं।

अब तीन सिक्कों को एक साथ लेकर कई बार उछालिए। प्राप्त परिणामों को ध्यान पूर्वक देखिए।

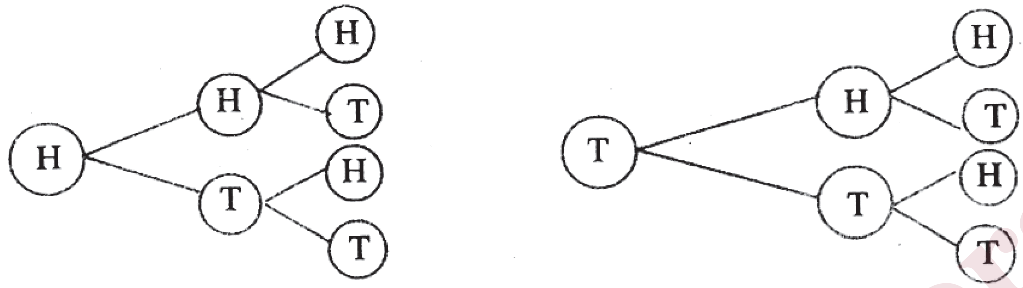
प्रथम सिक्के पर शीर्ष या पूँछ आ सकता है।

H T { HT }

प्रथम सिक्के पर शीर्ष आने के संगत द्वितीय सिक्के पर शीर्ष या पूँछ आ सकता है। इसी प्रकार प्रथम सिक्के पर पूँछ आने के संगत द्वितीय सिक्के पर शीर्ष या पूँछ आ सकता है।

{H H, H T, T H, T T}

अब प्रथम एवं द्वितीय सिक्कों पर H H या H T या T H या T T आने के संगत तीसरे सिक्के पर भी शीर्ष या पूँछ ऊपर आ सकता है।



इस प्रकार तीन सिक्कों को एक साथ फेंकने पर कुल संभव 8 स्थितियों सामने आती है। दूसरे शब्दों में तीन सिक्कों को एक साथ फेंकने पर कुल केवल 8 ही सम्भव परिणाम HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH और TTT प्राप्त होते हैं।

ज्ञातव्य है कि यहाँ HHH, HHT, HTH,... प्रत्येक के ऊपर आने की संभावना समान है।

कीजिए, देखिए

क्रिया-कलाप-3

दो सिक्कों को एक साथ 10 बार, 20 बार, 30 बार उछाल कर निम्नांकित प्रारूप की सारणी में ऊपर आने वाले परिणामों की संख्या लिखिए—

दो सिक्कों को एक साथ उछालने की संख्या	HH आने की संख्या	HT आने की संख्या	TH आने की संख्या	TT आने की संख्या
10				
20				
30				

आप देख सकते हैं कि उछालों की संख्या जैसे—जैसे बढ़ती जाती है, HH, HT, TH और TT के ऊपर आने की संख्याएँ आपस में लगभग बराबर होती जाती है अर्थात् उपर्युक्त चारों घटनाओं के घटित होने की संभावनाएँ लगभग समान होती है।

क्रिया-कलाप-4

तीन सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने पर प्राप्त परिणामों को निम्नांकित सारणी में अंकित कीजिए।

तीन सिक्कों को एक साथ उछालने की संख्या	परिणामों की संख्या							
	HHH	HHT	HTH	HTT	THH	THT	TTH	TTT
20								
40								
60								
80								

यहाँ भी आप देख सकते हैं कि उछालों की संख्या जैसे-जैसे बढ़ती जाती है HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH और TTT की संख्याएँ आपस में लगभग बराबर होती जाती हैं अर्थात् उपर्युक्त सभी आठों घटनाओं के घटित होने की संभावनाएँ लगभग समान होती हैं।

मूल्यांकन

1. तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। तो निम्नांकित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखिए—
   (i) कोई चित प्रकट नहीं होता,
   (ii) केवल एक चित आता है,
   (iii) कम से कम दो चित प्रकट होते हैं,
   (iv) तीनों चित आते हैं।
2. दो सिक्के एक साथ 40 बार उछाले गये यदि HH, HT, TH क्रमशः 9, 8, 12 बार आये हों तो ज्ञात कीजिए कि TT कितनी बार आयेगा?
3. दो सिल्कों को एक साथ 400 बार उछालने पर देखा गया कि

दो चित्त	90 बार
एक चित	210 बार
कोई भी चित नहीं	100 बार

   इनमें से प्रत्येक घटना के घटित होने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

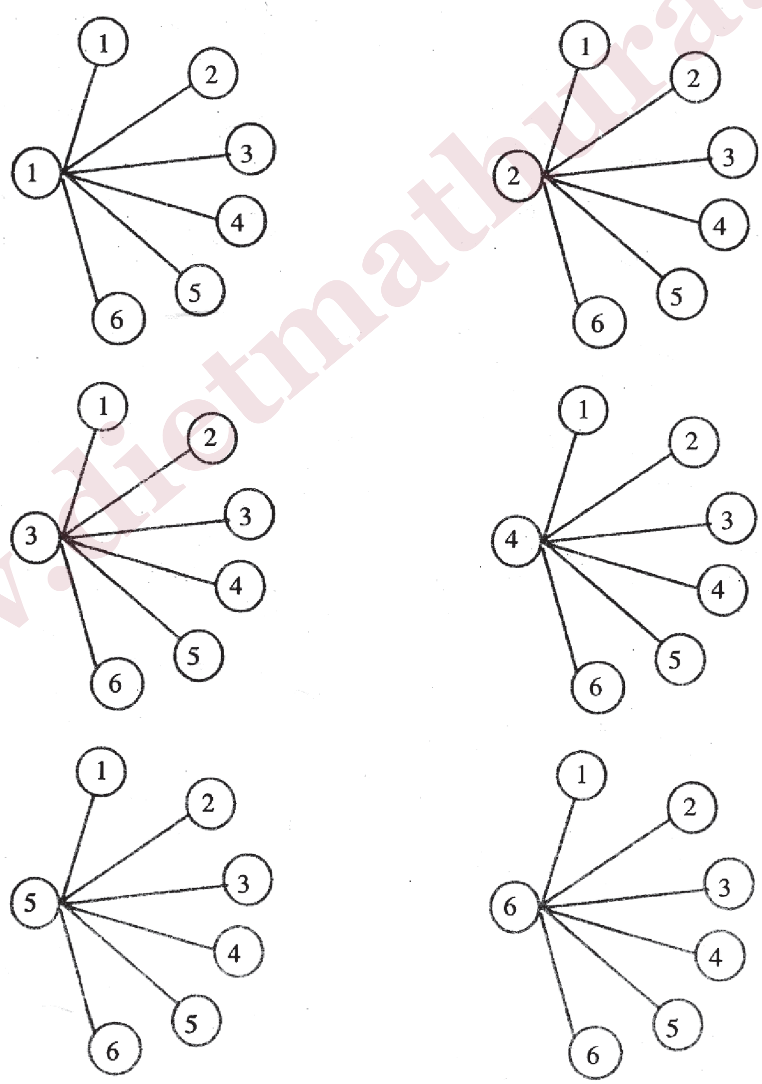
———

इकाई-8

दो पाँसों को एक साथ फेंकने को प्रयोग

दो पाँसों को एक साथ फेंकने का प्रयोग

आपने जब एक समांगी पाँसा फेंका था तो देखा था कि ऊपर सम सम्भावी छह संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6 आयी थीं। अब दो पाँसे एक साथ लेकर फेंकिए। आप देख सकते हैं कि प्रथम पाँसे पर किसी भी संख्या के ऊपर आने के संगत दूसरे पाँसे पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी एक संख्या ऊपर आ सकती है। इस तथ्य को निम्नवत् समझा जा सकता है—



इस प्रकार आप देख सकते हैं कि दो पाँसों को, एक साथ लेकर फेंकने पर कुल सम संभावी 36 परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। ये सभी 36 परिणाम एक दूसरे से भिन्न हैं तथा इनमें से प्रत्येक के आने की सम्भावना समान है। ये 36 परिणाम निम्नवत् हैं—

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

ध्यान दीजिए कि (1, 2), (2, 1) से भिन्न है। इसी प्रकार (5, 6), (6, 5) से भिन्न है, इत्यादि।

संभावनाओं का संख्यात्मक मापन

हम देख चुके हैं कि जब कोई सिक्का उछाला जाता है तो दो और केवल दो परिणाम प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार यदि दो सिक्कों को एक साथ लेकर उछालते हैं तो चार और केवल चार परिणाम प्राप्त होते हैं और तीन सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने पर आठ और केवल आठ परिणाम प्राप्त होते हैं। उपर्युक्त सभी दशाओं में प्राप्त परिणाम विशेष को एक घटना भी कहते हैं।

उदाहरण के लिए जब एक सिक्का उछाला जाता है तो ऊपर शीर्ष का आना एक घटना है। इसी प्रकार ऊपर पूँछ का आना भी एक भिन्न घटना है। संकेत की भाषा में H प्राप्त होना एक घटना है तथा T प्राप्त होना दूसरी घटना है। यदृच्छाया प्रयोग के इन परिणामों अथवा घटनाओं के समूह {H, T} को **प्रतिदर्श समष्टि (Sample Space)** कहा जाता है, जिसे सामान्यतः S द्वारा संसूचित करते हैं।

अतः S = {H, T}

यहाँ दोनों परिणाम अथवा घटनाएँ प्रतिदर्श समष्टि के अवयव कहलाते हैं।

इसी प्रकार जब दो सिक्के एक साथ लेकर उछाले जाते हैं तो प्राप्त होने वाले चर संभव परिणाम HH, HT, TH, TT भी चार भिन्न-भिन्न घटनाएँ हैं। इनका समूह दो सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने के यदृच्छाया प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि है। अतः इस प्रकार प्रतिदर्श समष्टि

S = {HH, HT, TH, TT}

पुनः, इसी प्रकार जब तीन सिक्के एक साथ लेकर उछाले जाते हैं, तो इस यदृच्छया प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि S आठ संभव परिणामों (या घटनाओं) HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT का समूह प्राप्त होता है।

अर्थात् S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT , TTH, TTT}

उपर्युक्त सभी यदृच्छाया प्रयोगों में सभी घटनाएँ सम संभावी होती हैं तथा जब एक घटना घटित होती है तो स्वतः ही वह अन्य घटनाओं को घटित होने से रोक देती है।

उदाहरण के लिए जब एक सिक्का उछाला जाता है तो या तो शीर्ष ऊपर आता है अथवा पूँछ। ऐसा सम्भव ही नहीं है कि एक साथ शीर्ष और पूँछ ऊपर आ जायें। यहाँ देख सकते हैं कि एक सिक्का के उछालों पर कुल केवल दो घटनाएँ **H** या **T** घटित हो सकती है तथा दोनों घटनाओं में से प्रत्येक के घटित होने की संभावना समान है। अतः कहा जा सकता है कि घटना **H** के घटने की संभावना $\frac{1}{2}$ है और **T** के घटने की संभावना भी $\frac{1}{2}$ है। घटना के घटित होने की संभावना का यही संख्यात्मक मापन है।

इसी प्रकार जब दो सिक्के लेकर उछाले जाते हैं तो इस यदृच्छाया प्रयोग के कुल चार परिणाम **HH, HT, TH** और **TT** प्राप्त होते हैं और इनमें से प्रत्येक के प्राप्त होने की संभावना समान रहती है। अतः यहाँ प्रत्येक परिणाम या घटना के प्राप्त होने या घटित होने की संभावना $\frac{1}{4}$ है।

पुनः तीन सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने के यदृच्छाया प्रयोग में **8** परिणामों के प्राप्त होने की संभावना समान होती है। अतः इनमें से प्रत्येक के घटित होने की संभावना $\frac{1}{8}$ है। अर्थात् **HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH** और **TTT** में से प्रत्येक के घटित होने की संभावना $\frac{1}{8}$ है।

निष्कर्ष :

- एक सिक्का उछालने पर प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना $= \frac{1}{2}$
- दो ,, ,, ,, $= \frac{1}{4}$
- तीन ,, ,, ,, $= \frac{1}{8}$

अब पाँसा फेंकने पर विचार कीजिए। जब एक पाँसा फेंका जाता है तो कुल छह समसम्भव परिणाम प्राप्त होते हैं। यहाँ भी परिणाम को घटना कहते हैं तथा इन घटनाओं (या परिणामों) के समूह को पाँसा फेंकने के यदृच्छया प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि **S** कहते हैं।

अतः $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

यह भी संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना समान होती है और

प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना $\frac{1}{6}$ के बराबर है।

इसी प्रकार जब दो पाँसे एक साथ लेकर फेंके जाते हैं तो समसम्भावी कुल 36 घटनाएँ निम्नांकित होती हैं—

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

जो इस प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि के अवयव हैं तथा इनमें से प्रत्येक के घटित होने की संभावना का संख्यात्मक मापन $\frac{1}{36}$ के बराबर हो जाता है।

निष्कर्ष :

एक पाँसा उछालने पर प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना	$=\frac{1}{6}$
दो पासा ,, ,, ,,	$=\frac{1}{36}$

टिप्पणी :

(1) उपर्युक्त उल्लिखित सभी घटनाएँ सरल घटनाएँ (Simple Events) कहलाती हैं।

(2) किसी घटना के घटित होने की संभावना के मापन को प्रायिकता (Probability) भी कहते हैं।

मूल्यांकन

1. दो सिक्कों को एक साथ लेकर फेंकने पर कितने परिणाम प्राप्त होते हैं।
2. तीन सिक्कों को एक साथ फेंकने पर कुल कितने घटनाएँ हो सकती हैं।
3. दो पाँसे को एक साथ फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि में समान अंकों वाले कितने जोड़े हो सकते हैं।

4. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर प्रतिदर्श समष्टि में कुल कितने अवयव होते है। समुच्चय लिखिए।
5. दो पाँसे एक साथ फेंके जाते हैं और पाँसों पर ऊपर आने वाले अंकों का योगफल लिया जाता है। निम्नांकित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखिए—
   (i) प्राप्त योग सम संख्या हो,
   (ii) प्राप्त योग 3 का अपवर्त्य हो,
   (iii) प्राप्त योग 4 से न्यून हो,
   (iv) प्राप्त योग 10 से अधिक हो।
6. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर दोनों पर सम अंकों के ऊपर आने की घटना का समुच्चय ज्ञात कीजिए।
7. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर दोनों पर विषम अंकों के ऊपर आने की घटना का समुच्चय लिखिए।
8. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर अंकों का योग विषम संख्या आने का समुच्चय लिखिए।
9. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर अंकों का योग अभाज्य संख्या होने का समुच्चय लिखिए।
   एक लाटरी में 100 इनाम हैं जबकि उसके 100000 टिकट बिके हैं। इस लाटरी का एक टिकट खरीदने वाले वयक्ति की इनाम जीतने की संभावना कितनी है।

———

इकाई-9

सम्भावनाओं का दैनिक जीवन से सम्बन्ध

संभावनाओं को दैनिक जीवन से बड़ा गहरा सम्बन्ध है। हम कोई भी कार्य किसी उद्देश्य की सम्प्राप्ति के लिए करते हैं। उदाहरणार्थ, आप कक्षा 8 में किस लिए अध्ययन कर रहे हैं। स्पष्टतः आपके जीवन को प्रत्येक क्रिया-कलाप किसी न किसी उद्देश्य से जुड़ा हुआ है। आपकी सदैव यही अभिलाषा होती है कि आप अपने कार्य-उद्देश्य में, लक्ष्य-सम्प्राप्ति में सफल रहें, किन्तु क्या सर्वदा यह संभव हो पाता है? कदाचित नहीं। हम कभी सफल होते हैं तो कभी असफल। (हमारे प्रत्येक कार्य का अन्त या तो सफलता के साथ होता है अथवा असफलता के साथ। ऐसा भी नहीं है कि हम बार-बार सफल ही हों या बार-बार असफल। कभी सफलता तो कभी असफलता, कभी बार-बार सफलता तो कभी बार-बार असफलता हमारे कदम चूमती है। पूरा जीवन ही अनिश्चितताओं से भरा पड़ा है। सुबह उठने से लेकर रात सोने तक न जाने कितनी घटनाएँ घटित होती रहती हैं, जिनके परिणामों के विषय में हम पूर्वानुमान या प्रागुक्ति तो व्यक्त कर सकते हैं किन्तु वे सही होंगी या गलत, इसे सुनिश्चित के साथ कहा नहीं जा सकता।) आज सम्पूर्ण आर्थिक जगत संभावनाओं पर ही टिका हुआ है। कृषि, वाणिज्य, आर्थिक जगत, आयुर्विज्ञान, जैविक विज्ञान, मौसम आदि अनेक क्षेत्रों में संभावनाओं की सांख्यिकी का प्रयोग किया जा रहा है। नित्य प्रति शेयरों के मूल्यों में उछाल या गिरावट, मुद्रास्फीति की दर, कृषि एवं औद्योगिक उत्पादन, विपणन आदि सभी कुछ सम्भावनाओं पर ही टिका है। किसी देश का बजट भी इन्हीं संभावनाओं पर आधारित होता है। किसी नये उद्योग-धन्धे की स्थापना भी संभावनाओं पर टिकी होती है। किसी संप्रभुता प्राप्त जनतंत्र में जन प्रतिनिधियों के चुनाव के परिणाम भी संभावनाओं पर ही आधारित होते हैं। सब प्रकार के सर्वेक्षण के परिणाम भी संभावनाओं पर टिके होते हैं।

आप काम तो कोई भी कर सकते हैं किन्तु सफलता आपके हाथ में नहीं होती। आप सफल भी हो सकते हैं और असफल भी। यहीं से प्रारम्भ हो जाता है संभावनाओं का संसार। दैनिक जीवन की सफलता, असफलता आदि की संभावनाओं का संख्यात्मक रूप में मापन का प्रयास 'संभावनाओं की सांख्यिकी' के अध्ययन में किया गया है, जिसे सामान्यतः हम प्रायिकता (Probability) के नाम से जानते हैं।

मान लीजिये किसी प्रतियोगितात्मक परीक्षा में 50 सीटें हैं और चयन हेतु कुल 50,000 अभ्यर्थी उस परीक्षामें सम्मिलित हुए हैं, यहाँ यह माना जा रहा है कि प्रत्येक अभ्यर्थी के चयनित होने की संभावना दूसरों के समान है। अतः प्रत्येक अभ्यर्थी के चयनित होने की संभावना का संख्यात्मक मापन

$\frac{50}{50,000}$ अर्थात् $\frac{1}{1000}$ के बराबर माना जाता है। दूसरे शब्दों में कहा जाता है कि प्रत्येक अभ्यर्थी के चयनित होने की संभावना $\frac{1}{1000}$ है।

उदाहरण : यदि कोई कम्पनी 10 लाख शेयर आमंत्रित करती है और उसे प्राप्त करने के लिए 50 लाख लोग आवेदन करते हैं तो प्रत्येक आवेदक का उस कम्पनी का शेयर प्राप्त करने की संभावना ज्ञात कीजिए।

हल : शेयर प्राप्त करने की संभावना $=\frac{10,00,000}{50,00,000}$

$=\frac{1}{5}$ होगी

बीमा कम्पनियों, सटोरियों, नियोजन आदि में भी संभावना की सांख्यिकी की भारी आवश्यकता पड़ती है।

उदाहरण 1. एक थैले में 6 लाल और 3 काली गेंदें हैं। एक काली गेंद यादृच्छाया निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक थैले में कुल 6 + 3 = 9 गेंदें हैं जिनमें 3 काली हैं।

अतः एक काली गेंद निकालने की प्रायिकता $=\frac{3}{6+3}$

$=\frac{3}{9}$

$=\frac{1}{3}$

उदाहरण 2. एक कक्षा में 12 विद्यार्थी हैं जिसमें 5 लड़के और शेष लड़कियाँ हैं। यदि उस कक्षा से एक विद्यार्थी चुनना है तो लड़की के चुने की प्रायिकता क्या होगी?

हल : कक्षा में कुल विद्यार्थी = 12 है

कक्षा में कुल लड़के = 5 है

तब कुल लड़कियाँ = 12 − 5 = 7 होंगी।

जब कक्षा से एक विद्यार्थी चुनना है तो

लड़की के चुने जाने की प्रायिकता $= \frac{7}{12}$ होगी।

उदाहरण 3. एक साधारण पाँसे को फेंककर तीन से बड़ी संख्या प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात करो।

हल : चूँकि पाँसा 6 प्रकार से गिर सकता है और पाँसे के गिरने की छ विधियों में से तीन (4, 5, 6) ऐसी हैं जो 3 से बड़ी हैं। अतः तीन से अधिक अंक फेंकने की प्रायिकता $= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

समुच्चय सिद्धान्त से S(P) = {1, 2, 3, 4, 5, 6} के समुच्चय में 6 बिन्दु हैं, और S(E) = {4 ,5 6} समुच्चय ही पक्ष में है जिसमें 3 बिन्दु हैं।

अतः प्रायिकता $= \frac{S(E)}{S(P)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$

मूल्यांकन

1. एक पाँसें से एक दाव में 4 से बड़ा अंक फेंकने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से एक पत्ता खींचा जाता है, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह इक्का होगा।
3. यदि एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हों तो एक काली गेंद निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. किसी ऐसे वर्ष में जो लीप वर्ष न हो 53 रविवार होने की प्रायिकता क्या होगी?
5. एक कक्षा में 12 विद्यार्थी है जिनमें 7 लड़कियाँ और शेष लड़के हैं। उस कक्षा से एक विद्यार्थी चुनना है। बताओं उसके लड़के होने की प्रायिकता क्या हैं?
6. पाँसे के एक बार फेंकने में ऊपर 5 बिन्दु आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. एक थैले में 4 लाल, 5 काली, और 7 सफेद गेंदें हैं। यदि एक गेंद यादृच्छाया निकाली जाती हैं तो उसके काली होने की प्रायिकता क्या है?
8. यादृच्छाया चुने गये 30 दिन वाले किसी माह में 5 रविवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
9. दो सिक्के एक साथ 40 बार उछाले गये। यदि HH, HT, TH क्रमशः 9, 8, 12 बार आये हों तो ज्ञात कीजिये कि TT कितनी बार आया होगा?
10. एक सिक्का 1000 बार उछाला गया और पाया गया कि चित 455 बार आया। ज्ञात कीजिए पट आने का प्रतिशत कितना है।

11. दो सिक्कों को एक साथ 400 बार उछालने पर देखा गया कि

दो चित	90 बार
एक चित	210 बार
कोई भी चित नहीं	100 बार

इनमें से प्रत्येक घटना के घटित होने का प्रतिशत ज्ञात कीजिये।

12. एक पाँसे को 1000 बार फेंकने पर प्राप्त परिणामों 1, 2, 3, 4, 5 और 6 की बारम्बारताएँ निम्नांकित सारणी में दी हुई हैं। 1, 2, 3, 4, 5, 6 में प्रत्येक के आने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता	180	150	160	140	180	190

13. किसी समांगी पाँसा को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक के ऊपर आने की संभावना का मापन क्या होगा?

14. प्रत्येक प्रश्न के चार उत्तर दिये गये हैं, सही उत्तर छाँटिए—

1. दो पाँसों को एक साथ फेंकने पर 7 से अधिक अंक आने की प्रायिकता होगी—

(i) $\frac{7}{36}$ (ii) $\frac{7}{12}$

(iii) $\frac{5}{12}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

2. किसी पद पर A की नियुक्ति की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ तथा उसी पद पर B की नियुक्ति की प्रायिकता $\frac{2}{5}$ है उनमें से किसी एक की नियुक्ति हो इस बात की प्रायिकता होगी।

(i) $\frac{11}{15}$ (ii) $\frac{2}{15}$

(iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $\frac{8}{5}$

3. एक घटना के प्रतिकूल संयोगानुपात 2 : 3 है, तो उसके घटने की प्रायिकता होगी।

(i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{3}{8}$

(iii) $\frac{1}{8}$ (iv) $\frac{8}{5}$

4. समुद्र पार जाने वाले 100 जहाजों में से लगभग 50 जहाज डूब जाते हैं। समुद्र पार जाने वाले किसी जहाज के डूबने की प्रायिकता होगी।

(i) $\frac{50}{100}$ (ii) $\frac{50}{150}$

(iii) $\frac{10}{50}$ (iv) इनमें से कोई नहीं

5. एक बैग में 20 रंगीन गेंदें हैं जिसमें 8 लाल, 7 नीली, 3 हरी और दो सफेद हैं बैग में से एक गेंद निकाली जाती है।

इस प्रश्न के आधार पर निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

(a) गेंद लाल हो इसकी प्रायिकता होगी।

(i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{2}{5}$

(iii) $\frac{3}{5}$ (iv) $\frac{5}{3}$

(b) गेंद नीली हो इसकी प्रायिकता होगी।

(i) $\frac{8}{20}$ (ii) $\frac{7}{20}$

(iii) $\frac{6}{20}$ (iv) $\frac{9}{20}$

(c) गेंद नीली न होने की प्रायिकता होगी—

(i) $\frac{13}{20}$ (ii) $\frac{14}{20}$

(iii) $\frac{12}{20}$ (iv) $\frac{11}{20}$

(d) गेंद लाल न होने की प्रायिकता होगी—

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{11}{20}$

(iii) $\frac{9}{20}$ (iv) $\frac{13}{20}$

(e) गेंद हरी हो इसकी सम्भावना (प्रायिकता होगी)।

(i) $\frac{3}{20}$ (ii) $\frac{7}{20}$

(iii) $\frac{9}{20}$ (iv) $\frac{11}{20}$

(f) गेंद हरी न होने की प्रायिकता होगी—

(i) $\frac{19}{20}$ (ii) $\frac{21}{20}$

(iii) $\frac{23}{20}$ (iv) $\frac{17}{20}$

———

इकाई-10

अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका एवं बहुलक की गणना

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित प्रकरणों की जानकारी होगी—

1. अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका का अर्थ
2. माध्यिका की गणना
3. बहुलक की आवश्यकता
4. बहुलक की गणना

आप सभी प्रशिक्षु लोग अवर्गीकृत आँकड़ों एवं वर्गीकृत आँकड़ों से भली-भाँति परिचित हो चुके हैं। अब तक आपने आँकड़ों के आलेखीय निरुपण में चित्रालेख, दण्डारेख, वृत्तारेख एवं आयतचित्र की अवधारणा को समझ लिया है तथा इनका निरुपण करना, इनसे निष्कर्ष ज्ञात करना तथा अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य निकालना सीख लिया है। इनके अतिरिक्त इस इकाई में आँकड़ों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्तर्गत अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका और बहुलक के विषय में चर्चा करेंगे।

माध्यिका

माध्यिका की अवधारणा को स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लेते हैं। मान लीजिए कि कक्षा 6 के पाँच शिक्षार्थियों का भार क्रमशः 49, 55, 43, 57 और 52 किग्रा. है। इन सभी शिक्षार्थियों को भार के बढ़ते हुए क्रम में (आरोही क्रम में) खड़ा किया जाय तो इनके भार का क्रम 43, 49, 52, 55 और 56 होंगे। इसी प्रकार यदि उन्हें भार के घटते हुए क्रम में (अवरोही क्रम में) खड़ा किया जाय तो उनके भार का क्रम 57, 55, 52, 49 और 43 किग्रा. होंगे। दोनों स्थितियों में ठीक मध्य में वह शिक्षार्थी खड़ा होगा जिसका भार 52 किग्रा. है। भार के आरोही क्रम में खड़ा होने पर मध्यस्थ शिक्षार्थी के पहले दो शिक्षार्थियों का भार उसके भार से कम तथा बाद के दो शिक्षार्थियों का भार उसके भार से अधिक होगा। इसी प्रकार अवरोही क्रम में खड़े होने की स्थिति में मध्यस्थ शिक्षार्थी के पूर्व दो शिक्षार्थियों का भार उसके भार से कम तथा बाद के दो शिक्षार्थियों का भार उसके भार से अधिक होगा। इस प्रकार आपने देखा कि दोनों स्थितियों में 52 किग्रा वाला भार पूरे भार को ठीक दो भागों में बाँटता है। अतः 52 किग्रा. पूरे प्रेक्षण के ठीक मध्य में पड़ता है, इसे ही माध्यिका कहते हैं। अतः माध्यिका दिये गये प्रेक्षणों में वह मान होता है जो प्रेक्षणों को ठीक दो भागों में बाँटता है। इस प्रकार :

यदि आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाये, तो मध्य में पड़ने वाले पद का मान माध्यिका कहलाती है।

माध्यिका ज्ञात करना

(a) जब आँकड़े अवर्गीकृत तथा विषम संख्या में हों—

जब अवर्गीकृत आँकड़े विषम संख्या में हों, तो उनकी माध्यिका ज्ञात करने के लिए उन आँकड़ों को पहले आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। तत्पश्चात् कुल पदों की संख्या में 1 जोड़कर प्राप्त मान में 2 से भाग दे देते हैं। इस प्रकार मध्य पद प्राप्त हो जाता है। मध्य पद का मान ही माध्यिका होता है।

अर्थात् माध्यिका $= \frac{\text{कुल पदों की संख्या} + 1}{2}$ वाँ पद

यदि पदों की कुल संख्या n है, तो

माध्यिका $= \frac{n+1}{2}$ वें पद का मान

उदाहरणार्थ, पूर्व के पाँच शिक्षार्थियों के भार को आरोही क्रम में रखने पर—

आँकड़ों का आरोही क्रम—43, 49, 52, 55, 56

यहाँ पर $n = 5$, अतः

माध्यिका $= \left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें पद का मान

$= \left(\frac{5+1}{2}\right)$ वें पद का मान

$= \left(\frac{6}{2}\right)$ वें पद का मान

= तीसरा पद

अर्थात् माध्यिका = 52 किग्रा. होगा।

उदाहरण 1. सात बालिकाओं की ऊँचाई सेमी. में निम्नवत् है—

148, 151, 153, 144, 142, 152, 155

इनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : दिए गये आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर

142, 144, 148, 151, 152, 153, 155

अतः माध्यिका $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$वें पद का मान

यहाँ पर $n = 7$

$\therefore$ माध्यिका $=\left(\frac{7+1}{2}\right)$वें पद का मान

$=\left(\frac{8}{2}\right)$वें पद का मान

$=$ चौथा पद

$=151$ सेमी.

उदाहरण 2. आँकड़ों 18, 20, 25, 28, 23, 36, 35, 42, 40 की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आँकड़ों को अवरोही क्रम में रखने पर

42, 40, 36, 35, 28, 25, 23, 20, 18

माध्यिका $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$वें पद का मान

यहाँ पर $n = 9$

अतः माध्यिका $=\left(\frac{9+1}{2}\right)$वें पद का मान

$=\left(\frac{10}{2}\right)$वें पद का मान

$=5$वाँ पद

$=28$

(b) जब आँकड़े अवर्गीकृत तथा सम संख्या में हों—

अभी तक आपने विषम संख्या वाले अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात की है। अब सम संख्या वाले अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका की गणना की चर्चा करेंगे। यदि किसी समूह में n सम पद हैं

तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले आँकड़ों को आरोही तथा अवरोही क्रम में रखते हैं। इसके पश्चात् $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें पद का मान तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें पद के मान का योगफल ज्ञात करके उसे 2 से भाग देकर माध्यिका ज्ञात करते हैं।

अतः माध्यिका $= \dfrac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{वें पद का मान}}{2}$

उदाहरण 3. विद्यालय की बास्केट बॉल टीम द्वारा 10 मैचों में प्राप्त अंक निम्नवत् है—

10, 12, 8, 9, 11, 19, 13, 10, 20, 22

मैच के अंकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : मैच के अंकों के आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर,

8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 19, 20, 22

यहाँ $n = 10$, पद सम संख्या में है।

$$\text{माध्यिका} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right) \text{वें पद का मान} + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{\left(\frac{10}{2}\right) \text{वें पद का मान} + \left(\frac{10}{2}+1\right) \text{वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{5 \text{वें पद का मान} + 6 \text{वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{11+12}{2}$$

$$= \frac{23}{2} = 11.5$$

अर्थात् माध्यिका = 11.5

(c) जब आँकड़ें अवर्गीकृत हों, परन्तु सारणीबद्ध हों

अवर्गीकृत सारणीबद्ध आँकड़ों में पदों की बारम्बारता दी हुई रहती है। ऐसे आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले संचयी बारम्बारता ज्ञात की जाती है। संचयी बारम्बारता ज्ञात करने के लिए उस पद की बारम्बारता में उसके पूर्ववर्ती समस्त पदों की बारम्बारताएँ जोड़ दी जाती है। अंतिम पद

की संचयी बारम्बारता का मान कुल पदों की बारम्बारताओं के योग के बराबर होता है। अंतिम संचयी बारम्बारता का मान सम या विषम होने पर माध्यिका की गणना सम या विषम अवर्गीकृत आँकड़ों की गणना की विधि से ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 4. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए—

पद	2	4	6	8	10	12	14
बारम्बारता	3	2	2	4	3	1	2

हल : आँकड़ों की संचयी बारम्बारता सारणी निम्नवत् है—

पद	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
2	3	3
4	2	$(3+2)=5$
6	2	$(5+2)=7$
8	4	$(7+4)=11$
10	3	$(11+3)=14$
12	1	$(14+1)=15$
14	2	$(15+2)=17$
योग	17	

यहाँ $n = 17$, अर्थात् पदों की संख्या विषम है।

अतः माध्यिका $=\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वाँ पद का मान

$=\left(\frac{17+1}{2}\right)$ वें पद का मान

$=$ 9वाँ पद का मान

9वाँ पद उस वर्ग में होगा जिसकी संचयी बारम्बारता 11 है और संचयी बारम्बारता 11 का पद 8 है। अतः 9वें पद का मान $= 8$

$\therefore$ माध्यिका $= 8$

उदाहरण 5. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में)	12	13	14	15	16	17	18
शिक्षार्थी	4	5	4	6	5	4	2

हल : उपर्युक्त बारम्बारता बंटन की संचयी बारम्बारता सारणी निम्नवत् है—

आयु (वर्षों में)	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
12	4	4
13	5	$(4+5)=9$
14	4	$(9+4)=13$
15	6	$(13+6)=19$
16	5	$(19+5)=24$
17	4	$(24+4)=28$
18	2	$(28+2)=30$
योग	$n=30$	

यहाँ $n = 30$, अर्थात् पदों की संख्या सम है। इसकी माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले $\left(\frac{n}{2}\right)$ वाँ पद तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद ज्ञात करना पड़ेगा।

$\frac{n}{2}$ वाँ पद $= \frac{30}{2}$ वाँ पद

$= 15$वाँ पद

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$वाँ पद $=\left(\frac{30}{2}+1\right)$वाँ पद $= (15 + 1) = 16$वाँ पद

15वाँ पद तथा 16वाँ पद उस वर्ग में होगा जिसकी बारम्बारता 19 है और संचयी बारम्बारता 19 का पद मान 15 है। अतः

15वें पद का मान = 15

16वें पद का मान = 15

$$\text{माध्यिका} = \frac{\text{15वें पद का मान} + \text{16वें पद का मान}}{2}$$

$$= \frac{15+15}{2}$$

$$= 15 \text{ वर्ष}$$

बहुलक

आप लोग अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्य व माध्यिका से परिचित हो चुके हैं। अब हम योग बहुलक की चर्चा करेंगे। मान लीजिए किसी कक्षा के विद्यार्थियों की आयु (वर्षों) में क्रमशः 13, 14, 13, 15, 12, 12, 13, 15, 14, 12, 13, 11 है। इन आँकड़ों को हम निम्नलिखित प्रकार से रख सकते हैं—

आयु (वर्षों में)	11	12	13	14	15
बारम्बारता	1	3	4	2	2

उपरोक्त तालिका में आप देख रहे हैं कि 12 विद्यार्थियों में 4 विद्यार्थी ऐसे हैं जिनकी आयु 13 वर्ष है। अतः हम कह सकते हैं कि आँकड़े 13 की पुनरावृत्ति 4 बार हुई है। इसलिए आँकड़ों का बहुलक 13 वर्ष है, क्योंकि बहुलक का अर्थ है सर्वाधिक बारम्बारता वाला आँकड़ा। अतः

दिये गये आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं अर्थात् जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है, वह पद बहुलक कहलाता है।

बहुलक की आवश्यकता

बहुलक के ज्ञान की आवश्यकता व्यापार या उद्योग जगत में बहुत अधिक है। बड़े पैमाने पर व्यापार के लिए माल बनाने वालों के लिए बहुलक का महत्त्व अधिक है। जैसे किसी फैक्टरी में उस नाप की बनियान अधिक बनाई जायेगी जिनकी बाजार में माँग अधिक होगी। दुकानदार भी अपनी दुकान में उसी नाप की बनियान या अन्य रेडीमेड कपड़े अधिक संख्या में रखता है जिसकी बिक्री अधिक होती है। यह माप ही बहुलक है।

बहुलक प्रेक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है।

बहुलक की गणना (जब आँकड़ें अवर्गीकृत हों)

अवर्गीकृत आँकड़ों की गणना प्रेक्षण मात्र से किया जाता है।

जैसे—

उदाहरण 6. 10 छात्रों द्वारा प्राप्त किये गये निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए—

62, 65, 63, 70, 72, 70, 74, 70, 64, 80

हल : इसमें 70 की बारम्बारता सबसे अधिक है। इसलिए इसका बहुलक 70 है।

उदाहरण 7. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए।

पद	12	16	20	24	28
बारम्बारता	5	11	15	22	8

हल : उपरोक्त बारम्बारता बंटन सारणी को देखने से स्पष्ट है कि 24 की बारम्बारता सबसे अधिक 22 है। अतः इसका बहुलक 24 है।

मूल्यांकन

1. आँकड़ों 2, 3, 2, 4, 2, 5, 6, 2, 4 का बहुलक है—

   (i) 2 (ii) 4

   (iii) 5 (iv) 6

2. आँकड़ों 5, 7, 9, 11, 13 की माध्यिका है—

   (i) 5 (ii) 7

   (iii) 9 (iv) 11

3. आँकड़ों 8, 12, 9, 15 का आरोही क्रम है—

   (i) 8, 12, 15, 9 (ii) 8, 9, 12, 15

   (iii) 15, 12, 9, 8 (iv) 9, 8, 12, 15.

4. आँकड़ों 3, 4, 7, 13, 15, 10, 9 की माध्यिका है—

   (i) 9 (ii) 7

   (iii) 10 (iv) 13

5. 13, 14, 10, 12, 11, 12, 13, 10, 12 का बहुलक है—

   (i) 10 (ii) 12

   (iii) 13 (iv) 14

6. एक विद्यालय के 7 अध्यापकों की आयु (वर्षों में) 25, 57, 32, 27, 40, 32, 42 है। आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

7. किसी कक्षा की 8 बालिकाओं की ऊँचाई (सेमी. में) क्रमशः 141, 143, 137, 135, 136, 150, 146 तथा 140 है। आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

8. निम्नलिखित सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए।

पद	3	4	6	8	10
बारम्बारता	3	6	5	6	4

9. विश्व हाथ धुलाई दिवस पर आयोजित प्रतियोगिता में विद्यालय के बच्चों द्वारा साबुन से हाथ धोने में लगा समय (सेकेण्ड) निम्नलिखित हैं—

20, 25, 20, 17, 15, 13, 17, 19, 20, 21, 25, 20, 15, 23 आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

10. निम्नलिखित सारणी में 40 शिक्षार्थियों की आयु (वर्षों में) दी हुई है। सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए—

आयु (वर्षों में)	12	13	14	15	16
शिक्षार्थियों की संख्या	4	8	12	6	10

———

इकाई-11

त्रिकोणमितीय अनुपातों की अवधारणा तथा 0°, 30°, 45°, 60° तथा 90° के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करना

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नलिखित प्रकरणों की जानकारी होगी—

(1) त्रिकोणमितीय अनुपातों की अवधारणा

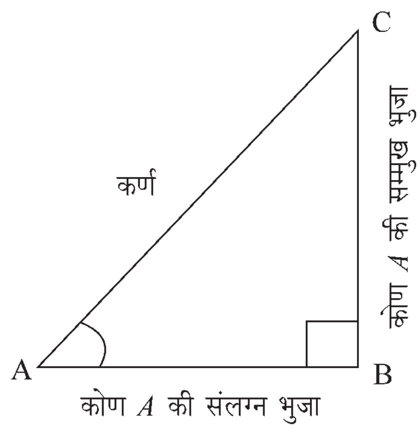
(2) कुछ विशिष्ट कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात

आप सभी प्रशिक्षु लोग त्रिभुज, विशेष रूप से समकोण त्रिभुजों के बारे में अध्ययन कर चुके हैं। अब हम एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के कुछ अनुपातों का उसके न्यूनकोणों के सापेक्ष अध्ययन करेंगे जिन्हें कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात कहते हैं।

1. त्रिकोणमितीय अनुपात—

आइए, हम एक समकोण त्रिभुज ABC लेते हैं जिसका एक कोण $\angle CAB$ (या संक्षेप में कोण A) एक न्यूनकोण है। कोण A के सापेक्ष भुजा BC की स्थिति पर ध्यान दीजिए।

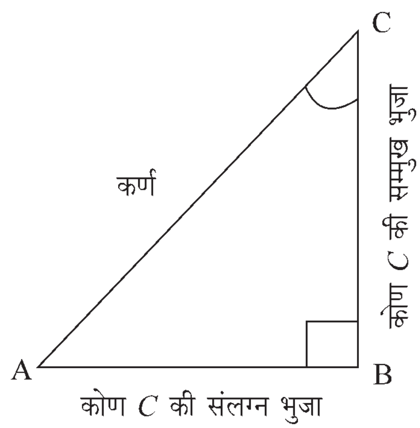
यह भुजा कोण A के सामने है। इस भुजा को हम कोण A की सम्मुख भुजा कहते हैं। भुजा AC समकोण त्रिभुज का कर्ण है और भुजा AB, $\angle A$ की एक भुजा है। अतः इसे हम कोण A की संलग्न भुजा कहते हैं।



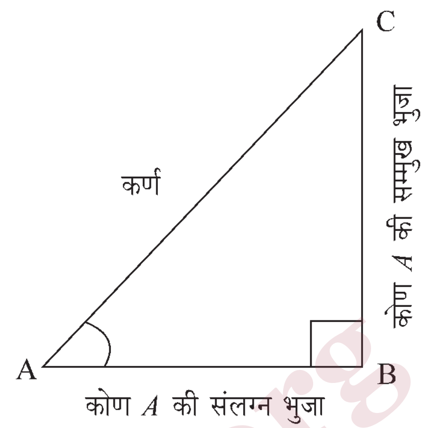
नीचे समकोण त्रिभुज ABC पर,

ध्यान दीजिए कि कोण A के स्थान पर कोण C लेने पर भुजाओं की स्थिति बदल जाती है।

पार्श्व चित्र में ABC एक समकोण त्रिभुज है। इस समकोण त्रिभुज में न्यूनकोण A के त्रिकोणमितीय अनुपात निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किए जाते हैं—



$\angle A$ का $\text{sine} = \dfrac{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{BC}{AC}$



$\angle A$ का $\text{cosine} = \dfrac{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कर्ण}} = \dfrac{AB}{AC}$

$\angle A$ का $\text{tangent} = \dfrac{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}}{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}} = \dfrac{BC}{AB}$

$\angle A$ का $\text{cosecant} = \dfrac{1}{\angle A \text{ का sine}} = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AC}{BC}$

$\angle A$ का $\text{secant} = \dfrac{1}{\angle A \text{ का cosine}} = \dfrac{\text{कर्ण}}{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}} = \dfrac{AC}{AB}$

$\angle A$ का $\text{cotangent} = \dfrac{1}{\angle A \text{ का tangent}} = \dfrac{\text{कोण } A \text{ की संलग्न भुजा}}{\text{कोण } A \text{ की सम्मुख भुजा}} = \dfrac{AB}{BC}$

ऊपर परिभाषित किए गए अनुपातों को संक्षेप में क्रमशः sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A और cot A लिखा जाता है। ध्यान दीजिए कि अनुपात cosec A, sec A और cot A अनुपात sin A, cos A और tan A के क्रमशः व्युत्क्रम होते हैं।

अतः एक समकोण त्रिभुज के एक न्यूनकोण के त्रिकोणमितीय अनुपात त्रिभुज के कोण और उसकी भुजाओं की लम्बाई के बीच के सम्बन्ध को व्यक्त करते हैं।

प्रयास कीजिए

> आप उपरोक्त त्रिभुज में कोण C के त्रिकोणमितीय अनुपातों को कोण A के अनुपातों की भाँति परिभाषित कीजिए।

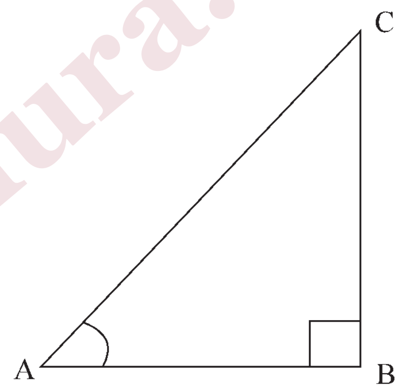
आप प्रशिक्षु लोग निम्नांकित तथ्यों की ओर ध्यान दीजिए—

1. sin A, cos A, tan A, cosec A, sec A और tan A क्रमशः sine A, cosine A, tangent A, cosecant A, secant A तथा cotangent A के संक्षिप्त रूप हैं।
2. sin A का यह अर्थ कदापि नहीं है कि sin और A का गुणनफल sin A है। अर्थात् $\sin A \neq \sin \times A$

इसी प्रकार	$\cos A \neq \cos \times A$
	$\tan A \neq \tan \times A$
	$\text{cosec} \neq \text{cosec} \times A$
	$\sec A \neq \sec \times A$
	$\cot A \neq \cot \times A$

2. त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच सम्बन्ध

पार्श्व में समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle ABC = 90°$ तथा $\angle CAB$ न्यूनकोण A है। आप लोग देख सकते हैं कि



1. $\sin A = \dfrac{BC}{AC}$

$\cos A = \dfrac{AB}{AC}$ तथा $\tan A = \dfrac{BC}{AB}$

अब, $$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{BC}{AC}}{\frac{AB}{AC}} = \frac{BC}{AC} \times \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB} = \tan A$$

अतः $\boxed{\tan A = \dfrac{\sin A}{\cos A}}$

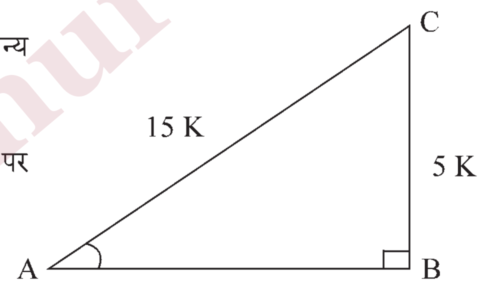
2. पुनः $$\frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{AB}{AC}}{\frac{BC}{AC}} = \frac{AB}{AC} \times \frac{AC}{BC} = \frac{AB}{BC}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{BC}{AB}\right)}$$
$$= \frac{1}{\tan A}$$
$$= \cot A$$

अतः $\boxed{\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}}$

उपरोक्त चर्चा में हमने एक न्यूनकोण के छः त्रिकोणमितीय अनुपात परिभाषित किए हैं। यदि हमें कोई एक अनुपात ज्ञात हो, तो क्या हम अन्य अनुपात ज्ञात कर सकते हैं? आइए हम इस पर चर्चा करें।

यदि एक समकोण त्रिभुज ABC में $\sin A = \frac{5}{13}$ तब अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए $\sin A = \frac{5}{13}$ के अर्थ पर ध्यान देना होगा।



$\sin A = \frac{5}{13}$ का अर्थ यह है कि समकोण त्रिभुज ABC में $\frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$ अर्थात् त्रिभुज ABC की भुजाओं BC और AC की लम्बाइयाँ 5 : 13 के अनुपात में हैं। अतः यदि BC, $5k$ के बराबर हो, तो AC, $13k$ के बराबर होगी, जहाँ k एक धन संख्या है। कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात करने के लिए हमें तीसरी भुजा AB की लम्बाई ज्ञात करनी होगी। आइए पाथागोरस प्रमेय की सहायता से अपेक्षित लम्बाई ज्ञात करें।

$\because AC^2 = BC^2 + AB^2$

या $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$$= (13k)^2 - (5k)^2$$
$$= 169k^2 - 25k^2$$
$$= 144k^2$$
$$= (12k)^2$$
$$AB = \pm 12k$$

अतः $AB = 12k$ ($AB = -12k$ क्यों नहीं हो सकता है? इस पर विचार कीजिए।)

अब $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{12k}{13k} = \dfrac{12}{13}$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5k}{12k} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{AC}{BC} = \frac{13k}{5k} = \frac{13}{5}$$

$$\sec A = \frac{AC}{AB} = \frac{13k}{12k} = \frac{13}{12}$$

$$\cot A = \frac{AB}{BC} = \frac{12k}{5k} = \frac{12}{5}$$

आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

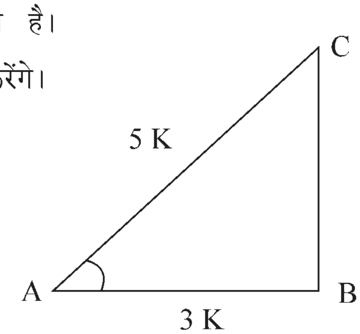
उदाहरण 1. यदि $\cos A = \dfrac{3}{5}$ तो कोण A के अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है $\cos A = \dfrac{3}{5}$, इसकी सहायता से एक समकोण त्रिभुज $\Delta\, ABC$ खींचते हैं।

हम जानते हैं कि $\cos A = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{5}$

अतः यदि $AB = 3k$ तब $AC = 5k$, जहाँ k एक धन संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय की सहायता से भुजा BC की लम्बाई ज्ञात करेंगे।



$$\begin{aligned} BC^2 &= AC^2 - AB^2 \\ &= (5k)^2 - (3k)^2 \\ &= 25k^2 - 9k^2 \\ &= 16k^2 \\ &= (4k)^2 \end{aligned}$$

अतः $BC = 4k$.

अब $\sin A = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{4k}{5k} = \dfrac{4}{5}$

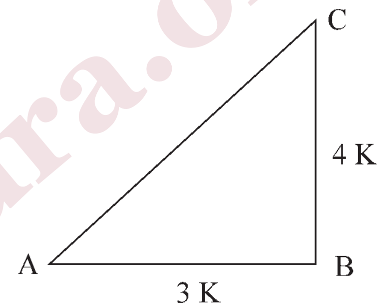
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$$

$$\text{cosec}\, A = \frac{1}{\sin A} = \frac{5}{4}$$
$$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{5}{3}$$
$$\cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{3}{4}$$

उदाहरण 2. किसी समकोण त्रिभुज ABC में यदि $\tan A = \frac{4}{3}$ तो ($\sin^2 A + \cos^2 A$) का मान ज्ञात कीजिए।

हल : समकोण त्रिभुज ABC में



$$\tan A = \frac{4}{3} = \frac{BC}{AB}$$

पाइथागोरस प्रमेय से AC का मान ज्ञात करेंगे।

$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\ &= (4k)^2 + (3k)^2 \\ &= 16k^2 + 9k^2 \\ &= 25k^2 \\ &= (5k)^2 \\ AC &= 5k. \end{aligned}$$

अतः $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} + \frac{9}{25} \\ &= \frac{16+9}{25} \\ &= \frac{25}{25} \\ &= 1 \end{aligned}$$

अतः $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

कुछ विशिष्ट कोणों में त्रिकोणमितीय अनुपात

(i) 45° के त्रिकोणमितीय अनुपात

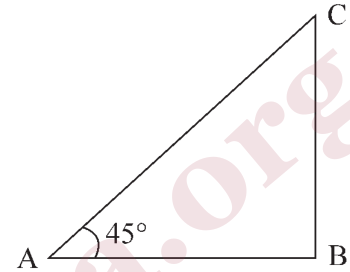
किसी त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि एक कोण 45° का है, तो दूसरा अन्य कोण भी 45° का होगा अर्थात्

$\angle A = \angle C = 45°$

अतः $BC = AB$ (क्यों?)

अब मान लीजिए $BC = AB = k$.

तब पाइथागोरस प्रमेय के अनुसार



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = k^2 + k^2 = 2k^2$$
$$AC = k\sqrt{2}$$

त्रिकोणमितीय अनुपातों की परिभाषाओं को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है—

$$\sin 45° = \frac{BC}{AC} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\cos 45° = \frac{AB}{AC} = \frac{k}{k\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\tan 45° = \frac{BC}{AB} = \frac{k}{k} = 1$$
$$\text{cosec } 45° = \frac{AC}{BC} = \frac{k\sqrt{2}}{k} = \sqrt{2}$$
$$\sec 45° = \frac{AC}{AB} = \frac{k\sqrt{2}}{k} = \sqrt{2}$$
$$\cot 45° = \frac{AB}{BC} = \frac{k}{k} = 1$$

(ii) 30° और 60° के त्रिकोणमितीय अनुपात

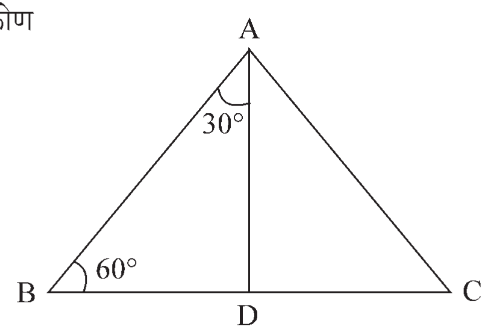
एक समबाहु त्रिभुज ABC लीजिए, जिसका प्रत्येक कोण 60° का होता है। इसलिए $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$

शीर्ष A से भुजा BC पर लम्ब AD डालिए।

अब $\Delta ABD \cong \Delta ADC$ (क्यों? विचार करें)

इसलिए $BD = DC$

और $\angle BAD = \angle CAD = 30°$



अब आप लोग यह देख रहे हैं कि $\angle ABD$ एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण D समकोण और $\angle BAD = 30°$ तथा $\angle ABD = 60°$ है।

अब मान लीजिए कि $AB = 2k$, तब $AB = BC = AC = 2k$

तथा $BD = DC = \frac{1}{2}BC = \frac{2k}{2} = k$

और त्रिभुज ADB में

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = (2k)^2 - (k)^2 = 4k^2 - k^2 = 3k^2$$
$$AD = k\sqrt{3}$$

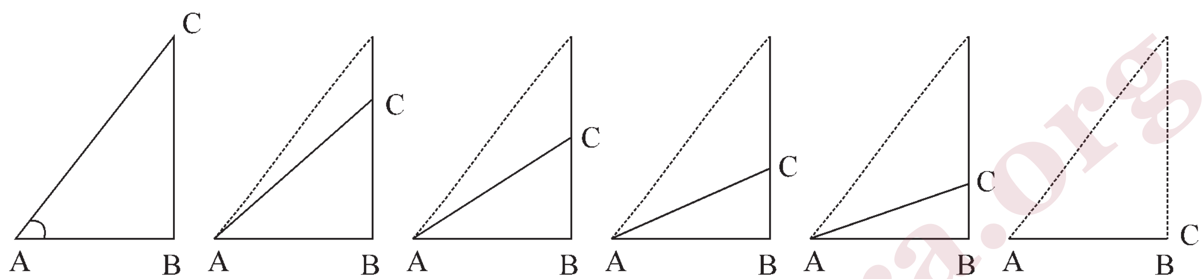
अब
$$\sin 30° = \frac{BD}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30° = \frac{AD}{AB} = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan 30° = \frac{BD}{AD} = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\text{cosec}30° = \frac{AB}{BD} = \frac{2k}{k} = 2$$
$$\sec 30° = \frac{AB}{AD} = \frac{2k}{k\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\cot 30° = \frac{AD}{BD} = \frac{k\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3}$$

इसी प्रकार

$$\sin 60° = \frac{AD}{AB} = \frac{k\sqrt{3}}{2k} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos 60° = \frac{BD}{AB} = \frac{k}{2k} = \frac{1}{2}$$
$$\tan 60° = \frac{AD}{BD} = \frac{k\sqrt{3}}{k} = \sqrt{3}$$
$$\text{cosec } 60° = \frac{AB}{AD} = \frac{2k}{k\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$\sec 60° = \frac{AB}{BD} = \frac{2k}{k} = 2$$
$$\cot 60° = \frac{BD}{AD} = \frac{k}{k\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(iii) 0° और 90° के त्रिकोणमितीय अनुपात

समकोण त्रिभुज ABC के कोण A को तब तक छोटा कीजिए जब तक कि यह शून्य नहीं हो जाता है। जैसे-जैसे $\angle A$ छोटा होता जाता है, वैसे-वैसे भुजा BC की भुजा की लम्बाई कम होती जाती है।



जब कोण $\angle A$, 0° के काफी निकट हो जाता है तब AC और AB लगभग बराबर जाते हैं। अतः $\angle A$ का मान शून्य होने पर $AC = AB$ माना जा सकता है, BC तथा का मान लगभग शून्य हो जाता है।

अतः $\sin 0^\circ = \frac{BC}{AC}$ का मान 0 के अत्यधिक निकट आ जाता है।

$\cos 0^\circ = \frac{AB}{AC}$ का मान 1 के अत्यधिक समीप होता है, क्योंकि $\angle A$, 0° के अत्यधिक निकट आने पर AC लगभग AB के बराबर हो जाता है। इस प्रकार से हम

$\sin 0^\circ = 0$ और $\cos 0^\circ = 1$ परिभाषित करते हैं।

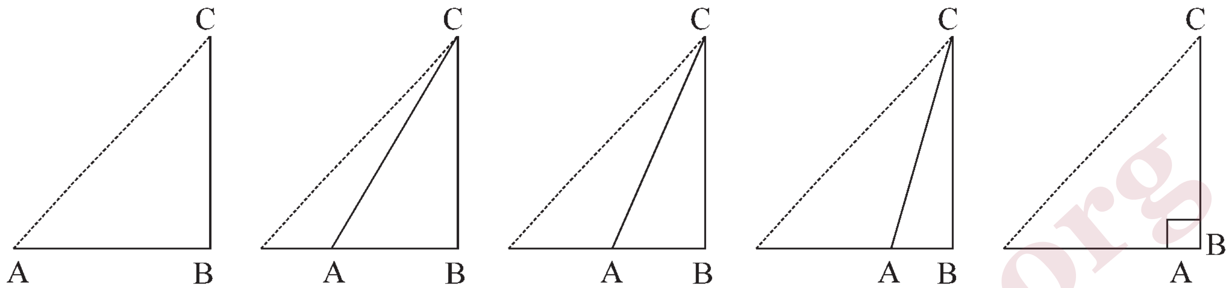
$$\tan 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0,$$

$\operatorname{cosec} 0^\circ = \frac{1}{\sin 0^\circ}$ यह परिभाषित नहीं है। (क्यों?)

$$\sec 0^\circ = \frac{1}{\cos 0^\circ} = 1$$

$\cot 0^\circ = \frac{1}{\tan 0^\circ} = \frac{1}{0}$ यह परिभाषित नहीं है। (क्यों?)

आइए अब हम उस स्थिति पर विचार करें जब $\angle A$ को इतना बड़ा करें कि वह 90° का हो जाए तब इस स्थिति में त्रिकोणमितीय अनुपात को कैसे परिभाषित करेंगे।



जैसे-जैसे $\angle A$ बड़ा होता जाता है, $\angle C$ वैसे-वैसे छोटा होता जाता है। अतः बिन्दु A, बिन्दु B के निकट होता जाता है और अंत में जब $\angle A$, 90° के अत्यधिक निकट आ जाता है, तो $\angle C$, 0° के अत्यधिक निकट आ जाता है और भुजा AC भुजा BC के साथ संपाती हो जाती है। (उपरोक्त चित्र में देखिए) जब $\angle C$, 0° के अत्यधिक निकट होता है तो $\angle A$, 90° के अत्यधिक निकट हो जाता है और भुजा AC लगभग वही हो जाती है, जो भुजा BC है। अतः $\sin 90° = \frac{BC}{AC}$, 1 के अधिक निकट हो जाता है। $\angle A$ के 90° होने पर AB लगभग शून्य हो जातीं है। अतः cos 90°, 0 के अत्यधिक निकट हो जाता है।

अतः हम यह परिभाषित करते हैं कि

$\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\tan 90° =$ अपरिभाषित

$\operatorname{cosec} 90° = 1$, $\sec 90° =$ अपरिभाषित तथा $\cot 90° = 0$

अब हम तुरन्त सन्दर्भ के लिए सारणी के रूप में 0°, 30°, 45°, 60° और 90° के सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों के मान को निम्नलिखित ढंग से प्रस्तुत करेंगे।

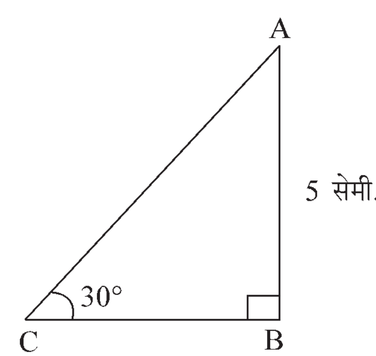
$\angle A$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	अपरिभाषित
cosec	अपरिभाषित	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	अपरिभाषित
cot	अपरिभाषित	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

उपरोक्त सारणी में आप देख सकते हैं कि जैसे-जैसे $\angle A$ का मान $0°$ से $90°$ तक बढ़ता जाता है, $\sin A$ का मान 0 से बढ़कर 1 हो जाता है और $\cos A$ का मान 1 से घटकर 0 हो जाता है।

आइए, अब हम कुछ उदाहरण लेकर ऊपर की सारणी में दिए गए मानों के प्रयोग को प्रदर्शित करें।

उदाहरण 3. समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90°$ तथा $AB = 5$ सेमी. और कोण $C = 30°$। भुजाओं BC और AC की लम्बाइयाँ ज्ञात कीजिए।

हल : समकोण त्रिभुज ABC में,



$$\sin 30° = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$AC = 5 \times 2 = 10 \text{ सेमी.}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{AB}{BC}$$

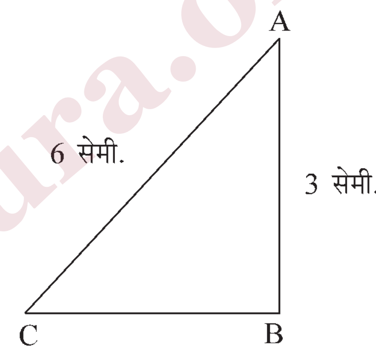
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{BC}$$

$$BC = 5\sqrt{3}\text{सेमी.}$$

उदाहरण 4. समकोण त्रिभुज ABC में $\angle B = 90^\circ$ तथा भुजा $AB = 3$ सेमी. और $AC = 6$ सेमी. है। $\angle BAC$ और $\angle ACB$ ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है— $AB = 3$ सेमी., $AC = 6$ सेमी.

(Fig.)



अतः $\sin C = \frac{AB}{AC}$

$$= \frac{3}{6}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\sin C = \sin 30^\circ$$

अतः $C = 30^\circ$ या $\angle ACB = 30^\circ$

और, इसलिए $\angle BAC = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$

$$= 180^\circ - 120^\circ$$

$$\angle BAC = 60^\circ$$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कोई एक अन्य भाग (या तो न्यूनकोण हो या कोई एक भुजा हो) ज्ञात हो, तो त्रिभुज की शेष भुजाएँ और कोण ज्ञात किए जा सकते हैं।

प्रयोगात्मक क्रियाकलाप

1. ABC एक समकोण त्रिभुज इस प्रकार बनाइए जिसमें $\angle B = 90^\circ$, $BC = 7$ सेमी तथा $\angle C = 70^\circ$।

B पुनः PQR एक समकोण त्रिभुज इस प्रकार बनायें जिसमें $\angle Q = 90^\circ$ सेमी तथा $\angle C = 70^\circ$।

3. त्रिभुज ABC में कोण 70° के विभिन्न त्रिकोणमितीय अनुपात भुजाओं को नापकर ज्ञात कीजिए।

4. इसी प्रकार त्रिभुज PQR में भी कोण 70° के विभिन्न त्रिकोणमित्तीय अनुपात भुजाओं को नाप कर ज्ञात कीजिए।

आप इस निष्कर्ष पर पहुँचेंगे कि किसी भी समकोण त्रिभुज में किसी भी के त्रिकोणमितीय मान सदैव समान होते हैं चाहें त्रिभुज का आकार कितना भी बड़ा या छोटा क्यों न हो।

इसी प्रकार किसी अन्य कोण के लिए भी इस क्रिया-कलाप को दोहराये।

मूल्यांकन

1. sin 60° + cos 60° का मान होगा—

(i) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ (ii) 1

(iii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2}+1$

2. sin 60° cos 30° + sin 30° cos 60° का मान है—

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1

(iii) 0 (iv) $1+\sqrt{3}$

3. sin $2A$ = 2 sin A तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है—

(i) 0° (ii) 30°

(iii) 45° (iv) 60°

4. $\frac{2\tan 30^\circ}{1-\tan^2 30^\circ}$ बराबर है—

(i) cos 60° (ii) sin 60°

(iii) tan 60° (iv) sin 30°

5. 2 sin 30° cos 30° का मान है—

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $\frac{1}{2}$

(iii) 1 (iv) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. निम्नलिखित के मान निकालिए—

(i) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

(ii) $\dfrac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$

(iii) $\dfrac{\sin 30° + \tan 45° - \operatorname{cosec} 60°}{\sec 30° + \cos 60° + \cot 45°}$

(iv) $\dfrac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

(v) $\dfrac{1-\tan^2 45°}{1+\tan^2 45°}$

(vi) $\dfrac{\cos 30° + \sin 60° + \operatorname{cosec} 45°}{1+\cos 45° + \sin 30° + \cot 45°}$

7. यदि $\sin A = \dfrac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $\sec\theta = \dfrac{13}{12}$ तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

9. समकोण त्रिभुज ABC में, $\angle B = 90°$, $AB = 24$ सेमी. और $BC = 7$ सेमी. है। कोण A तथा कोण C के सभी त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

10. समकोण त्रिभुज ABC में $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C$.

11. समकोण त्रिभुज PQR में $\angle Q = 90°$ तथा $PR + QR = 25$ सेमी. और $PQ = 5$ सेमी. है।

$\sin P$; $\cos P$ तथा $\tan P$ के मान ज्ञात कीजिए।

12. यदि $\cot\theta = \frac{7}{8}$ तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए—

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

(ii) $\cot^2\theta + \tan^2\theta$

13. यदि $3 \cot A = 4$ जाँच कीजिए कि $\frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \cos^2 A - \sin^2 A$, बराबर है या नहीं।

14. यदि $\sin\theta = \frac{5}{13}$ तो $\cot^2\theta - \tan^2\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

15. यदि $15 \cot A = 8$ तो $\sin A$, $\sin C$, $\sec A$ तथा $\sec C$ का मान ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-12
लम्बवृत्तीय बेलन तथा लम्बवृत्तीय शंकु की अवधारणा तथा इनका आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नलिखित प्रकरणों की जानकारी होगी—

(1) लम्बवृत्तीय बेलन की संकल्पना, इसका वक्रपृष्ठ आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ।

(2) लम्बवृत्तीय शंकु की अवधारणा, आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ।

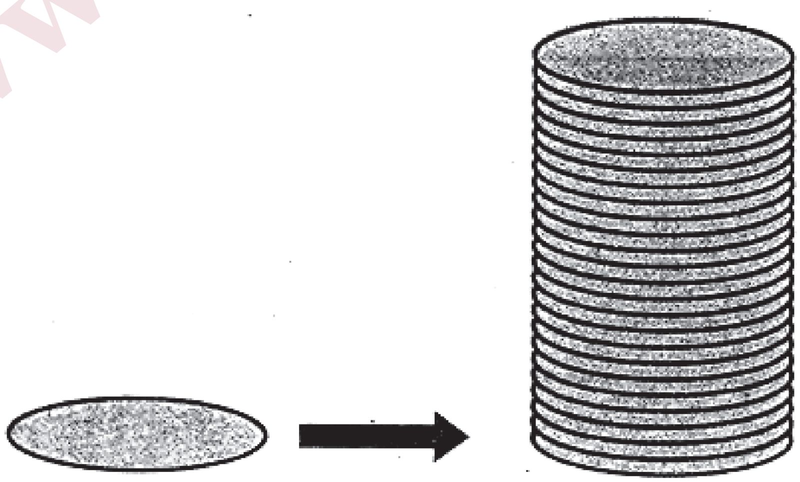
आप सभी लोग घन, घनाभ की आकृति तथा इसके आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ से भलीभाँति परिचित हैं। इस इकाई में हम लोग कुछ नई आकृतियाँ जैसे लम्बवृत्तीय बेलन तथा लम्बवृत्तीय शंकु के आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ की चर्चा करेंगे।

(1) लम्बवृत्तीय बेलन

आप सभी ने दैनिक जीवन में समतलों से बन्द त्रिविमीय आकृतियों के अतिरिक्त ऐसी आकृतियों को अवश्य देखा होगा जिसके पार्श्व पृष्ठ वक्रीय होते हैं जैसे—गोल, पाइप, गोल खम्भे, रोटी बेलने वाला बेलन तथा पेट्रोल का ड्रम आदि। इस प्रकार की आकृति का बोध करने के लिए आप लोग एक क्रिया कलाप कीजिए।

क्रिया कलाप

एक कागज की शीट लीजिए। इस शीट में से बराबर त्रिज्या के लगभग 8-10 वृत्ताकार शीट काट लें। अब इन वृत्ताकार शीटों को एक के ऊपर एक रखकर एक उर्ध्वाधर ढेरी बनाइए।



यदि हम इस ढेरी को सीधा ऊर्ध्वाधर रखते हैं, तो जो आकृति हमें प्राप्त होगी वह एक लम्बवृत्तीय बेलन कहलाती है। इसका कारण यह है कि इसका आधार वृत्ताकार है और ढेरी को आधार से लम्ब रूप (समकोण बनाते हुए) से रखा गया है।

चित्र (a) में आप सभी एक बेलन को देख रहे हैं, जो निश्चित रूप से वृत्ताकार है, परन्तु आधार से समकोण पर नहीं है। इसलिए आप इसे लम्बवृत्तीय बेलन नहीं कहेंगे।

इसी प्रकार चित्र (b) में बेलन का आधार वृत्ताकार नहीं है तो इसे भी आप लोग लम्बवृत्तीय बेलन नहीं कह सकते हैं।

नोट : यहाँ हम लोग केवल लम्बवृत्तीय बेलनों का ही अध्ययन करेंगे। अतः जब तक अन्यथा न कहा जाए 'बेलन' से तात्पर्य लम्बवृत्तीय बेलन से होगा।

प्रयास कीजिए—

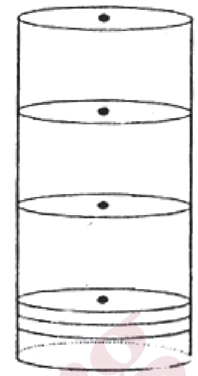
नीचे कुछ वस्तुओं की आकृतियाँ दी गयी हैं। इन्हें देखिये और इसी प्रकार की अपने पास-पड़ोस में पायी जाने वाली अन्य वस्तुओं के भी नाम बताइए।

इन आकृतियों की वस्तुओं को मुख्य भाग आकार में समान हैं और इनके आकार बेलनाकार हैं।

इन्हें कीजिए

प्रयोग 1 : दफ्ती के समान मोटाई वाली शीट के समान त्रिज्या वाले वृत्ताकार टुकड़ों को काटिए। इन वृत्ताकार टुकड़ों को काट कर एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार रखिए कि एक दूसरे को पूरा-पूरा

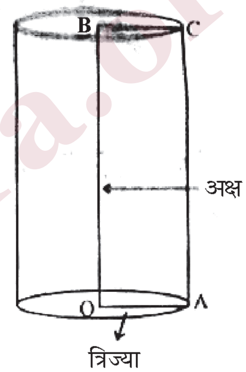
ढँक ले और देखिए कि निर्मित आकृति बेलन है अथवा नहीं। हम देखते हैं कि इस प्रकार निर्मित आकृति बेलनाकार है।



वृत्तीय समतल परिच्छेद (Cross-section) की त्रिज्या को बेलन की त्रिज्या कहते हैं।

पार्श्व चित्र में बेलन की त्रिज्या बताइए।

बेलन के वृत्तीय समतल परिच्छेद के केन्द्र से होकर जाने वाली रेखा को बेलन का अक्ष कहते हैं। पार्श्व चित्र में बेलन के अक्ष का नाम बताइए।



बेलन का निचला वृत्ताकार तल आधार कहलाता है। बेलन में कितने आधार होंगे?

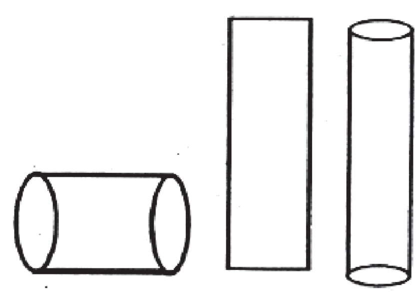
बेलन को उलट देने पर इसका ऊपरी तल आधार बन जायेगा।

बेलन के दोनों आधारों के बीच की दूरी को बेलन की लम्बाई या बेलन की ऊँचाई (h) कहते हैं।

यदि बेलन का अक्ष प्रत्येक वृत्तीय परिच्छेद के लम्बवत् है तो बेलन को लम्बवृत्तीय बेलन कहते हैं।

यहाँ हम लम्बवृत्तीय बेलन को केवल बेलन कहेंगे।

प्रयोग 2 : एक आयताकार मोटा कागज लीजिए। कागज की चौड़ाई को मोड़कर चित्रानुसार (पार्श्व चित्र) बेलन बनाइये। देखिए आयताकार कागज की लम्बाई बेलन की ऊँचाई और आयताकार कागज की चौड़ाई बेलन के आधार की परिधि है।



इसी प्रकार यदि लम्बाई को मोड़ कर बेलन बनायें, तो बेलन की ऊँचाई और आधार का परिमाप क्या होगा?

आयताकार कागज को उसकी एक भुजा के परितः घुमाने पर भी एक लम्ब वृत्तीय बेलन बनता है।

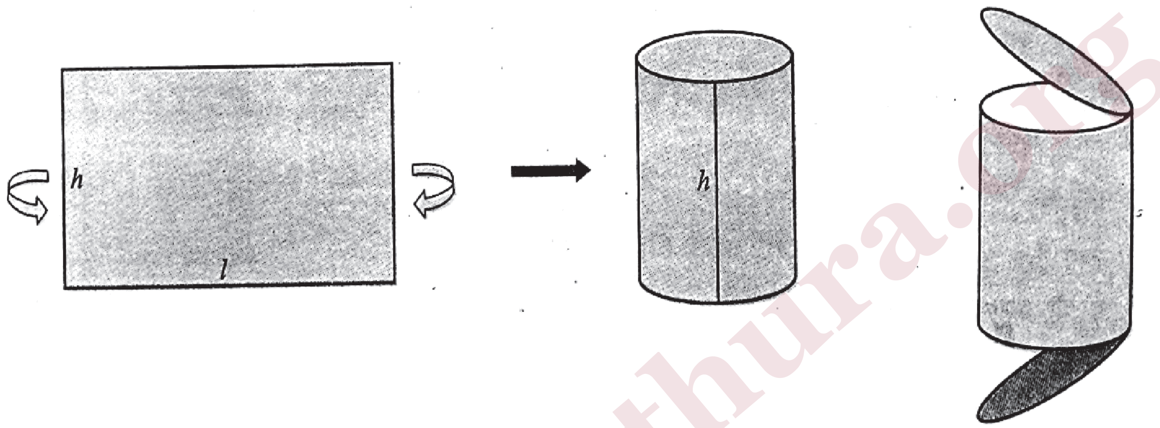
अतः

किसी आयत को उसके भुजा के परितः घुमाने से बने ठोस को लम्ब वृत्तीय बेलन कहते हैं। जिस भुजा के परितः घुमाया जाता है, उस भुजा की लम्बाई बेलन की ऊँचाई तथा दूसरी भुजा बेलन के आधार की त्रिज्या होती है।

लम्ब वृत्तीय बेलन का उपरोक्त वर्णन हमारे मस्तिष्क के सम्मुख दो भिन्न-भिन्न किन्तु सम्बन्धित आकृतियाँ उपस्थित करता है। खोखला बेलन तथा ठोस बेलन।

(2) लम्बवृत्तीय बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल :

अब, यदि किसी बेलन को एक रंगीन कागज से ढँकना हो, तो आप कागज की न्यूनतम मात्रा से इसे कैसे करेंगे? इस क्रिया कलाप को करने के लिए आप लोग पहले एक रंगीन कागज की एक आयताकार शीट लीजिए जिसकी लम्बाई ऐसी हो कि कागज बेलन के चारों ओर बस एक घूम जाए और उसकी चौड़ाई बेलन की ऊँचाई के बराबर हो।



इस शीट का क्षेत्रफल बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल होगा। शीट की लम्बाई बेलन के वृत्तीय आधार के परिधि के बराबर है, जो $2\pi r$ है, जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या है।

अतः बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल = आयताकार शीट का क्षेत्रफल

= लम्बाई × चौड़ाई

= बेलन के आधार का परिमाप × ऊँचाई

= $2\pi r \times h$

इसलिए

बेलन का वक्रपृष्ठ क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

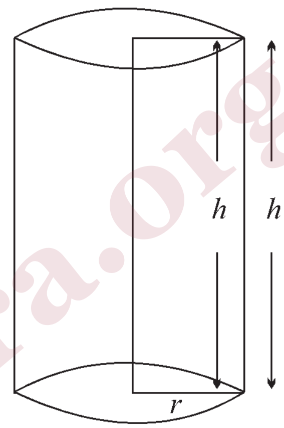
जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या तथा h उसकी ऊँचाई है।

यदि बेलन के ऊपर और निचले सिरों को भी ढँकना हो, तो आपको दो वृत्ताकार शीटों की और आवश्यकता पड़ेगी, जिनमें से प्रत्येक की त्रिज्या r होगी और क्षेत्रफल πr^2 होगा, तब इससे आपको बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r+h)$ प्राप्त होगा।

इसलिए **बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल $= 2\pi rh(r+h)$**

जहाँ r बेलन के आधार की त्रिज्या तथा h ऊँचाई है।

बेलन का आयतन–

आप प्रशिक्षु लोग किसी ठोस के आयतन से भलीभाँति परिचित है। मान लीजिए कि आपको h ऊँचाई के बेलन का आयतन ज्ञात करना है। इसके लिए **A** क्षेत्रफल के वृत्ताकार शीट को h ऊँचाई तक का ढेर लगाना होगा। मान लीजिए कि तैयार बेलन का आयतन **V** है। क्या आप बता सकते हैं कि **V, A** और **h** के बीच में क्या सम्बन्ध होगा?

स्पष्ट है कि—

प्रत्येक वृत्ताकार शीट द्वारा घेरे गए क्षेत्र का क्षेत्रफल × ऊँचाई

= उस बेलन द्वारा घेरे गए क्षेत्र का आयतन

अर्थात् $A \times h = V$

$\pi r^2 \times h = V$

इसलिए, $\boxed{\text{बेलन का आयतन} = \pi r^2 h}$

जहाँ r आधार की त्रिज्या तथा h बेलन की ऊँचाई है।

उदाहरण 1. एक बेलन की ऊँचाई 14 सेमी तथा त्रिज्या 7 सेमी है। इस बेलन का वक्रपृष्ठ तथा सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ r = 7 सेमी और h = 14 सेमी

∴ बेलन का वक्रपृष्ठ $= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 14$

$= 2 \times 22 \times 14$

= 616 वर्ग सेमी

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(r+h)$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(7+14)$

$= 2 \times 22 \times 21$

= 924 वर्ग सेमी

उदाहरण 2. एक बेलन के आधार का व्यास 28 सेमी तथा ऊँचाई 18 सेमी है। इस बेलन का आयतन तथा सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $2r = 28$ सेमी और $h = 18$ सेमी

चूँकि त्रिज्या $(r) = \frac{\text{व्यास}}{2} = \frac{28}{2} = 14$ सेमी

अतः बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 18$$

$= 11088$ घन सेमी

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(r+h)$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14(14+18)$$

$= 2816$ वर्ग सेमी

उदाहरण 3. 550 घन सेमी लोहे से एक बेलनाकार सरिया बनाई जाती है। यदि सरिया का व्यास 1 सेमी हो, तो सरिया की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि सरिया की लम्बाई h सेमी है।

अतः सरिया का आयतन $= \pi r^2 h$

$$= \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times h$$

प्रश्नानुसार, सरिया का आयतन = लोहे का आयतन

$$\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times h = 550$$

$$\frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times h = 550$$

$$h = \frac{550 \times 7}{22 \times 0.5 \times 0.5}$$

$= 700$ मी.

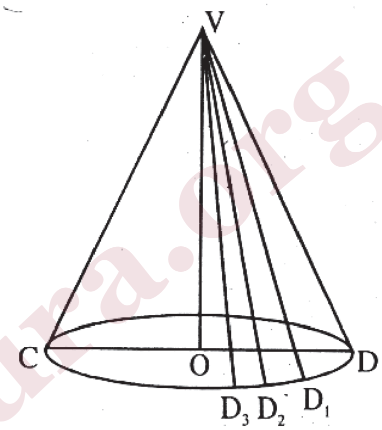
$= 7$ मीटर

अतः सरिया की लम्बाई $= 7$ मी.

लम्बवृत्तीय शंकु की अवधारणा

हम जोकर की टोपी, आइसक्रीम कोन, चुरमुरे की पुड़िया, आदि बहुत सी वस्तुओं को देखते हैं। इस प्रकार की वस्तुओं को लम्बवृत्तीय शंकु के आकार वाली वस्तुएँ कहा जाता है। इनका आधार वृत्ताकार और पार्श्व पृष्ठ वक्र होता है।

अपने पास-पड़ोस की लम्बवृत्तीय शंकु के आकार की कुछ और वस्तुओं के नाम बताइए।



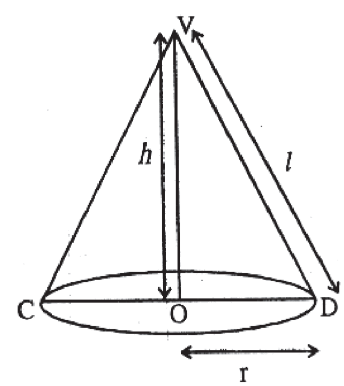
समकोण त्रिभुज के आकार की दफ्ती का एक टुकड़ा लीजिए। उसे समकोण बनाने वाली किसी भुजा के परितः घुमाइए। निर्मित ठोस शंकु है अथवा नहीं?

पार्श्व चित्र को देखिए। इस चित्र में समकोण त्रिभुज VOD को भुजा VO के परितः घुमाने से कर्ण VD की भिन्न-भिन्न स्थितियाँ VD_1, VD_2, VD_3 ... आदि दिखाई गई हैं। वे एक वक्र पृष्ठ का निर्माण कर रही हैं। भुजा OD एक चक्कर पूर्ण कर लेने पर वृत्ताकार समतल क्षेत्र का निर्माण करती है।

इस प्रकार

समकोण त्रिभुज को यदि समकोण बनाने वाली उसकी एक भुजा के परितः घुमाया जाय तो इसके द्वारा निर्मित ठोस को लम्बवृत्तीय शंकु कहते हैं।

निम्नांकित चित्र में V शंकु का शीर्ष है। VO लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई (h) और शीर्ष को आधार वृत्त पर स्थित किसी बिन्दु को मिलाने वाला रेखाखण्ड VC या VD उसकी तिरछी ऊँचाई (l) कहलाती है।



समकोण Δ VOD में

$$VD^2 = VO^2 + OD^2$$

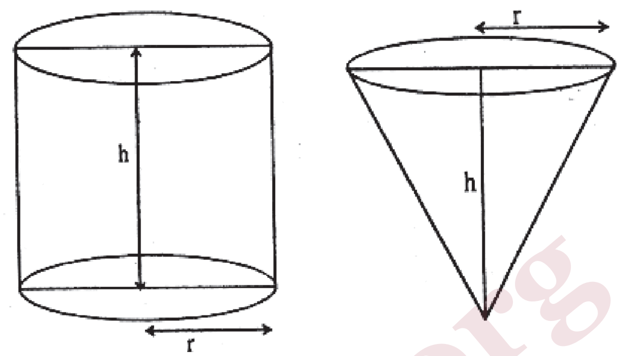
या, $l^2 = h^2 + r^2$

या, $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

अतः

शंकु की तिरछी ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

(5) लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन



समान ऊँचाई तथा समान आधार की त्रिज्या वाले एक बेलनाकार और एक शंक्वाकार पात्र को लीजिए। शंक्वाकार पात्र में पूरा-पूरा जल (अथवा बालू) भरकर बेलनाकार पात्र में डालिए। बेलना पात्र को जल अथवा बालू से पूरा-पूरा भरने के लिए शंक्वाकार पात्र से कितनी बार जल डालना पड़ा?

हम देखते हैं कि शंक्वाकार पात्र से तीन बार जल (या बालू) भरने पात्र पूरा-पूरा भर जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि शंक्वाकार पात्र का आयतन बेलनाकार पात्र के आयतन का एक तिहाई होता है। **अतः समान ऊँचाई तथा समान त्रिज्या वाले आधार के बेलनाकार तथा शंक्वाकार पात्रों के आयतन में 3 : 1 अनुपात होता है।** दूसरे शब्दों में शंकु का आयतन उसी आधार पर समान ऊँचाई के बेलन के आयतन का एक तिहाई होता है।

r त्रिज्या तथा h ऊँचाई वाले बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$

अतः r त्रिज्या तथा h ऊँचाई वाले शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

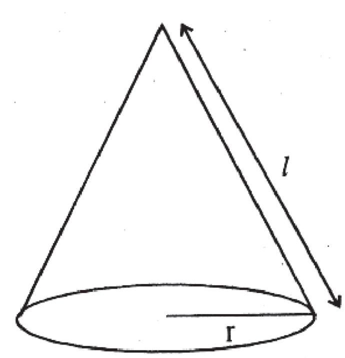
***h* ऊँचाई तथा *r* त्रिज्या वाले आधार के लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन** $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

(6) लम्ब वृत्तीय शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ

पार्श्वांकित शंकु को देखिए। इसका सम्पूर्ण पृष्ठ दो पृष्ठों से मिलकर बना है :

(i) वृत्ताकार समतल पृष्ठ

(ii) पार्श्व पृष्ठ या तिर्यक (तिरछा) पृष्ठ



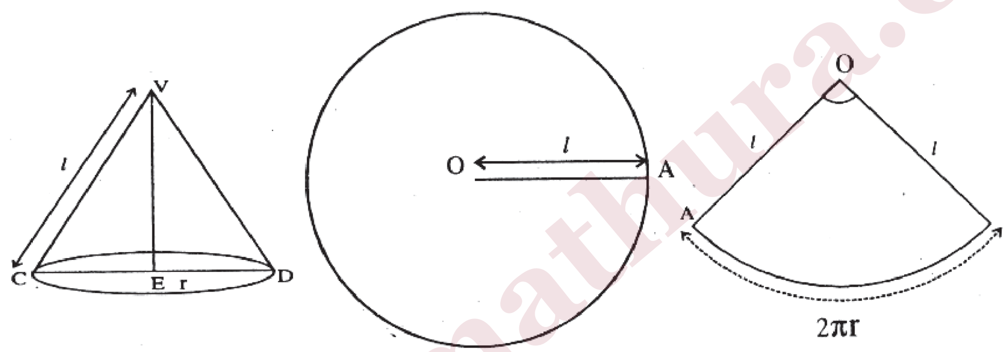
शंकु के वृत्ताकार समतल पृष्ठ क्षेत्रफल $= \pi r^2$

(r वृत्त की त्रिज्या है।)

अब गणित किट से शंकु निकालिए मान लीजिए इसके आधार की त्रिज्या r और तिरछी ऊँचाई l है। कागज पर त्रिज्या l से एक वृत्त बनाइए।

शंकु के आधार की परिधि कितनी है? हम जानते हैं कि परिधि $2\pi r$ है। वृत्त की त्रिज्या OA मिलाइए। कैंची की सहायता से वृत्त को O से A तक काटिए। इसे शंकु पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु O शंकु के शीर्ष V पर तथा बिन्दु A, बिन्दु C पर पड़े। वृत्त को शंके के चारों ओर एक चक्कर लपेटिए। वृत्त के बचे भाग को कैंची से काट कर अलग कर दीजिए। शंकु पर लिपटे वृत्त के भाग को कागज पर फैलाइए और देखिए यह एक त्रिज्यखण्ड है जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इस फैले हुए कागज के चाप तथा शंकु की परिधि की लम्बाई को पटरी तथा धागे की सहायता से नापिए। दोनों की लम्बाइयों में क्या सम्बन्ध है?

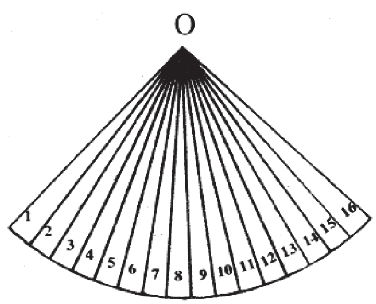
हम देखते हैं कि दोनों की लम्बाई समान है।

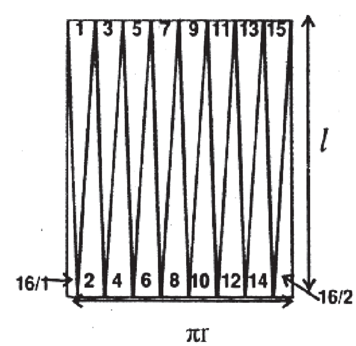


अतः

त्रिज्यखण्ड के चाप की लम्बाई शंकु की परिधि के बराबर है।

अब इस त्रिज्यखण्ड को इस प्रकार मोड़िए कि चित्रानुसार 16 त्रिज्यखण्डों में विभक्त हो जाय। प्रत्येक त्रिज्यखण्ड को सावधानी से काट कर अलग कीजिए। इन त्रिज्यखण्डों में से 8 त्रिज्यखण्डों के शीर्ष ऊपर तथा 7 त्रिज्यखण्डों के शीर्ष नीचे की ओर एकान्तर क्रम में रखकर निम्नांकित चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए तथा शेष बचे सोलहवें त्रिज्यखण्ड के दो बराबर भाग कर के एक भाग (16/1) को प्रारम्भ में तथा दूसरे (16/2) को अन्त में चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए। यह लगभग आयत जैसा दिखता है।





बताइए :

(i) इस आयत की लम्बाई कितनी होगी?

(ii) इस आयत की चौड़ाई कितनी होगी?

हम देखते हैं कि इस आयत की लम्बाई $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$ है तथा चौड़ाई l है।

अतः शंकु का पार्श्वपृष्ठ (तिरछा पृष्ठ) = आयत का क्षेत्रफल

$= \pi rl$

$= \pi rl$ वर्ग मात्रक

शंकु का पार्श्व पृष्ठ $= \pi rl$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ = पार्श्व पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल

$= \pi rl + \pi r^2$ क्षेत्रफल

$= \pi r\ (l + r)$ वर्ग मात्रक

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ $= \pi r(l + r)$

उदाहरण 4. एक लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी तथा ऊँचाई 12 सेमी है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $r = 3.5$ सेमी तथा $h = 12$ सेमी

शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 12$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 12$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{49}{4} \times 12$$

= 154 घन सेमी

उदाहरण 5. 15 मीटर ऊँचे शंक्वाकार तम्बू के आधार की परिधि 44 मीटर है। इस तम्बू को तैयार करने के लिए कितनी कैनवस की आवश्यकता होगी? तम्बू में आबद्ध वायु का आयतन भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है :

आधार की परिधि = 44 मीटर, ऊँचाई (h) = 15 मी.

प्रश्नानुसार,

$$\pi r = 44$$

$$\therefore \quad r = \frac{44}{2\pi}$$

$$= \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$$

$$= 7 \text{ मी.}$$

तिरछी ऊँचाई $(l) = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$= \sqrt{(15)^2 + (7)^2}$$

$$= \sqrt{225 + 49}$$

$$= \sqrt{274} \text{ मी.}$$

अतः कैनवस का क्षेत्रफल = शंकु का वक्रपृष्ठ

$$= \pi r l$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{274}$$

$$= 22\sqrt{274} \quad \text{वर्ग मी.}$$

तम्बू द्वारा आबद्ध वायु का आयतन = शंकु का आयतन

$$= \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 15$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 49 \times 15$$

$$= 770 \text{ घन मी.}$$

मूल्यांकन :

1. एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या 3 सेमी तथा ऊँचाई 5 सेमी है। बेलन का आयतन होगा—

   (i) 180π घन सेमी   (ii) 30π घन सेमी

   (iii) 150π घन सेमी   (iv) 45π घन सेमी

2. यदि एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या को आधा कर दिया जाय तथा ऊँचाई वही रहे तो इस प्रकार बने बेलन तथा पहले वाले बेलन के आयतनों में अनुपात होगा—

   (i) 1 : 4   (ii) 4 : 1

   (iii) 4 : 3   (iv) 3 : 4

3. दो समान आधार वाले लम्बवृत्तीय बेलनों की ऊँचाइयाँ 2 : 5 के अनुपात में हैं। इनके वक्रपृष्ठों का अनुपात होगा—

   (i) 2 : 5   (ii) 5 :2

   (iii) 3 : 2   (iv) 2 : 3

4. एक लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 8 सेमी और आधार का व्यास 12 सेमी है। उसकी तिर्यक ऊँचाई होगी—

   (i) 20 सेमी   (ii) 8 सेमी

   (iii) 12 सेमी   (iv) 10 सेमी

5. किसी शंकु की त्रिज्या समान रखते हुए उसकी ऊँचाई दो गुना कर देने से शंकु का आयतन हो जायेगा—

   (i) 2 गुना   (ii) 4 गुना

   (iii) 6 गुना   (iv) 8 गुना

6. एक लम्बवृत्तीय शंकु तथा बेलन के आधार की त्रिज्याएँ तथा ऊँचाइयाँ बराबर है। दोनों के आयतनों में अनुपात होगा—

   (i) 1 : 3   (ii) 1 : 2

   (iii) 2 : 3   (iv) $1 : \sqrt{2}$

7. एक लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई 9.0 सेमी तथा आधार का क्षेत्रफल 38.5 वर्ग सेमी है। शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए।

8. एक डेरा शंकु के आकार का है जिसकी ऊँचाई 12 मीटर है तथा वृत्ताकार फर्श की त्रिज्या 14 मीटर है। यदि एक आदमी के लिए 112 घन मीटर हवा की आवश्यकता होती है, तो डेरे में कितने आदमी आ सकते हैं?

9. एक लम्बवृत्तीय शंकु का आयतन 36π घन सेमी है। शंकु की ऊँचाई आधार के व्यास की दो गुनी है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

10. यदि एक ठोस लम्बवृत्तीय बेलन को पिघलाकर उसी त्रिज्या और ऊँचाई के लम्बवृत्तीय शंकु बनाये जाए तों तो ज्ञात कीजिए कि कुल कितने शंकु बनेंगे?

11. एक लम्बवृत्तीय शंकु एवं बेलन दोनों के आधार की त्रिज्या 5 सेमी तथा ऊँचाई 12 सेमी हो तो शंकु एवं बेलन के सम्पूर्ण पृष्ठों का अनुपात ज्ञात कीजिएं

12. किसी लम्बवृत्तीय शंकु की ऊँचाई उसके आधार की त्रिज्या के बराबर है तथा उसका आयतन 9π घन सेमी है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

13. एक 15 सेमी ऊँचाई वाले लम्बवृत्तीय बेलन का आयतन 96π घन सेमी है। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

14. दो लम्बवृत्तीय बेलनों की आधार त्रिज्याओं के अनुपात 1 : 2 है। यदि उनके आयतनों का अनुपात 5 : 12 हो, तो उनकी ऊँचाइयों के अनुपात ज्ञात कीजिए।

15. 22 सेमी लम्बा और 12 सेमी चौड़ा आयताकार कागज को दो प्रकार से मोड़कर दो विभिन्न वृत्तीय बेलनों का पृष्ठ बन सकता है। इस प्रकार जो बेलन बने उनके

    (i) आयतनों में अन्तर एवं

    (ii) सम्पूर्ण पृष्ठों में अन्तर ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-13

वर्ग समीकरण $x^2 = k$ के रूप वाले समीकरण का हल $ax^2 + bx + c = 0$ का हल (गुणनखण्ड विधि से)

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित की जानकारी होगी—

1. द्विघात समीकरण वर्ग समीकरण की अवधारणा।
2. समीकरण $x^2 = k$ के रूप वाले समीकरणों का हल तथा आधारित वार्तिक प्रश्न।
3. वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का हल (गुणनखण्ड विधि से) तथा आधारित वार्तिक प्रश्न।

आप सभी प्रशिक्षुगण एक चर वाली रेखीय समीकरणों का अध्ययन कर चुके हैं। इसके अतिरिक्त कुछ ऐसे भी समीकरण होते हैं जो रेखीय नहीं है अर्थात् जिनमें चर x की घात एक से अधिक हो सकती है।

(1) द्विघात समीकरण (वर्ग समीकरण)

ऐसा बहुपद जिसमें चर राशि का उच्चतम घातांक 2 हो, द्विघात बहुपद कहलाता है। यदि $p(x)$ एक द्विघात बहुपद है तो $p(x) = 0$ को द्विघात समीकरण कहते हैं। वास्तव में, कोई समीकरण $p(x) = 0$, जहाँ $p(x)$ घात 2 का एक बहुपद है एक द्विघात समीकरण कहलाती है। परन्तु जब हम $p(x)$ के पद घातों के घटते क्रम में लिखते हैं, तो हमें समीकरण का मानक रूप प्राप्त होता है। अर्थात् $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a \neq 0$, द्विघात समीकरण का मानक रूप कहलाता है।

निम्नांकित समीकरणों का अवलोकन कीजिए :

(i) $x^2 = 9$

(ii) $9x^2 = 16$

(iii) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(iv) $3x^2 + 10x + 8 = 0$

(v) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

इन्हें वर्ग समकरण कहते हैं क्योंकि इनमें चर x की अधिकतम घात 2 है।

उपर्युक्त समीकरणों को देखने से स्पष्ट है कि वर्ग समीकरण (i) और (ii) में x का एकघातीय पद नहीं है, केवल x का दो घात वाला पद और एक संख्यात्मक पद है। वर्ग समीकरण (iii), (iv) तथा (v) में बाँए पक्ष त्रिपदीय व्यंजक के रूप में हैं।

अब वर्ग समीकरण (i) तथा (ii) पर विचार कीजिए—

(i) $x^2 = 9$ एक निश्चित संख्या है।

(ii) $9x^2 = 16$

दोनों पक्षों में 9 का भाग देने पर—

$$x^2 = \frac{16}{9}$$

$\frac{16}{9}$ एक निश्चित संख्या है।

अतः वर्ग समीकरण (i) तथा (ii) को $x^2 = k$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ पर वर्ग समीकरण (i) में $k = 9$ और वर्ग समीकरण (ii)) में $9k = 16$ या $k = \frac{16}{9}$

समीकरण (iii), (iv) और (v) समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार के हैं।

ध्यान दीजिए (iii) में इस प्रकार $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$, (iv) में $a = 3$, $b = 10$, $c = 8$ और (v) में $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$ है।

अब हम समीकरण $3x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 2x + 4$ पर विचार करें।

समीकरण $3x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 2x + 4$ को भी $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में निम्नांकित विधि से लिखा जा सकता है—

$3x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 2x + 4$

या $3x^2 - 4x + 1 - 2x^2 + 2x + 4 = 0$

या $x^2 - 2x - 3 = 0$

या $1 \times x^2 + (-2)x + (-3) = 0$

या, $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ $a = 1$, $b = -2$ तथा $c = -3$

$ax^2 + bx + c = 0$ भी वर्ग समीकरण का एक मानक रूप है।

अतः वर्ग समीकरण के निम्नांकित दो मानक रूप है—

(i) $x^2 = k$ जहाँ पर k एक धनात्मक संख्या है। तथा

(ii) $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ पर x एक चर संख्या है तथा a, b और c अचर संख्याएँ हैं।

(2) समीकरण $x^2 = k$ के रूप वाले समीकरणों का हल

$x^2 = k$ में x अज्ञात चर है तथा k एक धनात्मक स्थिरांक है। यह आवश्यक नहीं है कि समीकरण में अज्ञात चर दर्शाने के लिए सदैव x का प्रयोग किया जाए। वस्तुतः कोई भी वर्णमाला का अक्षर, जैसे—y, z, n, p आदि का भी प्रयोग कर सकते हैं।

$x^2 = k$ प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए निम्नांकित समीकरणों पर विचार कीजिए।

उदाहरण 1. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

(i) $x^2 = 16$

(ii) $x^2 = 18$

(iii) $x^2 - 25 = 0$

हल :

(i) $\mathbf{x^2 = 16}$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

संक्षेप में,

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$$
$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

अतः $x = 4$ तथा -4

सत्यापन : $x = 4$, $x = -4$

$$x^2 = 4^2 = 16$$

$$x^2 = (-4^2) = 16$$

(ii) $x^2 = 18$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

या, $x = \pm\sqrt{18}$

$x = \pm\sqrt{9 \times 2} = (\pm\sqrt{9} \times \sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$

अतः $3\sqrt{2}$ और $-3\sqrt{2}$

सत्यापन : बायाँ पक्ष $x^2 = (3\sqrt{2})^2 = 3 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 18 =$ दायाँ पक्ष

और बायाँ पक्ष $x^2 = (-3\sqrt{2})^2 = -3 \times -3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 18 =$ दायाँ पक्ष

अतः उत्तर सही है।

(iii) $x^2 - 25 = 0$

(पक्षान्तर करने पर)

$x^2 = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ अतः $x = 5$ तथा -5

सत्यापन : $5^2 - 25 = 0$ तथा $(-5)^2 = 25 - 25 = 0$

अतः उत्तर सही है।

उपर्युक्त वर्ग समीकरणों के हल से स्पष्ट है कि प्रत्येक वर्ग समीकरण में अज्ञात संख्या x के दो मान हैं, जिनका निरपेक्ष मान समान है, परन्तु एक धनात्मक है, तथा दूसरा ऋणात्मक x के इन मानों को समीकरण के मूल (Roots) कहते हैं।

अतः $x^2 = k$ रूप वाले वर्ग समीकरणों को हल करने के लिए k का वर्गमूल ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि किसी संख्या के दो वर्गमूल होते हैं, जिनके निरपेक्ष मान समान होते हैं।

अतः $x^2 = k$

या, $x = \pm\sqrt{k}$

अर्थात् , $x = \sqrt{k}, x = -\sqrt{k}$

(3) समीकरण $x^2 = k$ पर आधारित साधारण वार्तिक प्रश्न

दैनिक जीवन की अनेक समस्याएँ हम समीकरण का उपयोग करके हल कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए हमको निम्नांकित चार चरणों का पालन करना होगा।

1. अज्ञात राशि को वर्णमाला के किसी अक्षर जैसे x, y, z, n, p आदि से व्यक्त कीजिए।
2. भाषा में दिये हुए कथन का समीकरण में अनुवाद कीजिए।
3. समीकरण हल कीजिए।
4. मूल समस्या में प्राप्त मान प्रतिस्थापित करके उत्तर की जाँच कीजिए।

आइये उदाहरणों के द्वारा वार्तिक प्रश्न को हल करना सीखें।

उदाहरण 2. एक वर्ग का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी है। उसकी भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि वर्ग की भुजा x सेमी है।)

वर्ग का क्षेत्रफल = (वर्ग की भुजा)^2

= x^2 वर्ग सेमी

परन्तु वर्ग का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी है।)

$\therefore \quad x^2 = 64$

$\therefore \quad x = \pm\sqrt{64}$

$= \pm 8$

$\therefore \quad x = 8$ तथा -8

परन्तु वर्ग की भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती है;

अतः $x = -8$ अमान्य है।

$\therefore \quad x = 8$

अतः वर्ग की भुजा = 8 सेमी

उत्तर की जाँच—वर्ग का क्षेत्रफल = 8 × 8 वर्ग सेमी = 64 सेमी

अतः उत्तर सही है।

प्रयास कीजिए :

1. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 121 वर्ग मीटर है। तो मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।
2. एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 256 वर्ग मीटर है। तो खेत का परिमाप ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 3. एक आयताकार बाग की लम्बाई, उसकी चौड़ाई की तीन गुनी है। यदि बाग का क्षेत्रफल 243 वर्ग मीटर हो तो बाग की लम्बाई कितनी है?

हल : मान लीजिए कि बाग की चौड़ाई x मी. है।

बाग की लम्बाई, उसकी चौड़ाई तीन गुनी है।

बाग की लम्बाई = 3 × चौड़ाई

= 3 × x मी.

= $3x$ मी.

बाग का क्षेत्रफल = लम्बाई $\times$ चौड़ाई

$= 3x \times x$ वर्ग मी.

$= 3x^2$ वर्ग मी.

परन्तु बाग का क्षेत्रफल 243 वर्ग मी. है।

$\therefore \quad 3x^2 = 243$

या $\quad x^2 = \frac{243}{3} = 81$

या $\quad x = \pm\sqrt{81}$

$= \pm 9$

परन्तु बाग की चौड़ाई ऋणात्मक नहीं होती है। इसलिए

बाग की चौड़ाई = 9 मी.

बाग की लम्बाई = 3 $\times$ 9 मी.

उत्तर की जाँच : क्षेत्रफल = 27 $\times$ 9

= 243 वर्ग मी.

अतः उत्तर सही है।

(4) वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का हल (गुणनखण्ड विधि से)

हम जानते हैं कि यदि $x \times y = 0,$ तो

$x = 0$

या, $y = 0$

इसी प्रकार यदि $x(x-4) = 0,$ है, तो

$x = 0$

अथवा $x - 4 = 0$

या, $x = 4$

और यदि $(x - 5)\ (x - 7) = 0$ हो, तो

$x - 5 = 0$ या, $x = 5$

अथवा $x - 7 = 0$ या, $x = 7$

अतः यदि दो (या दो से अधिक) व्यंजकों का गुणनफल शून्य हो, तो उनमें से कम से कम एक व्यंजक का मान शून्य अवश्य होगा।

अब समीकरण $(x-5)(x-7)=0$ के बायें पक्ष के व्यंजकों का गुणा कीजिए—

$$x^2-7x-5x+(-5)(-7)=0$$

या, $\quad x^2-(7+5)x+35=0$

या, $\quad x^2-12x+35=0$

हम देखते हैं कि यह एक वर्ग समीकरण है जिसका रूप $ax^2+bx+c=0$ का है, जहाँ $a = 1$, $b = -12$ तथा $c = 35$ है।

इसी प्रकार

$(x-8)(x+6)=0$ के बायें पक्ष के व्यंजकों का गुणा करने पर

$$x^2+6x-8x+(-8)(6)=0$$

या, $\quad x^2-2x-48=0$

यह भी $ax^2+bx+c=0$ के रूप का है, जहाँ पर $a = 1$, $b = -2$ तथा $c = -48$

अतः $ax^2+bx+c=0$ के रूप के वर्ग समीकरणों के हल, उनके बायें पक्ष के व्यंजक के गुणनखण्ड करके ज्ञात किये जाते हैं।

निम्नलिखित वर्ग समीकरण को देखिए—

(i) $\quad (x+1)(x-2)=0$

या, $\quad x^2+(1-2)x+1\times(-2)=0$

या, $\quad x^2+(-1)x+(-2)=0$

या, $\quad x^2-x-2=0$

(ii) $\quad (x-p)(x-q)=0$

या, $\quad x^2-(p+q)x+pq=0$

इस प्रकार हम देखते हैं कि रैखिक समीकरणों $x-p=0, x-q=0$ को गुणा करके वर्ग समीकरण $x^2-(p+q)x+pq=0$ प्राप्त कर सकते हैं जिसका हल $x = p$ तथा $x = q$ है। विलोमतः वर्ग समीकरण $x^2 + bx + c = 0$ का हल उसके गुणनखण्ड करके ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 4. समीकरण $x^2+7x+10=0$ को हल कीजिए।

हल : समीकरण $x^2+7x+10=0$ की समीकरण $ax^2+bx+c=0$ से तुलना करने पर

अतः $x^2+7x+10=0$ (गुणनखण्ड करने पर) यहाँ $a=1, b=7, c=10$

या, $x^2+(2+5)x+10=0$ $a \times c = 1 \times 10 = 10$

या, $x^2+2x+5x+10=0$ (गुणनखण्ड करने पर)

या, $x(x+2)+5(x+2)=0$ $10 = 2 \times 5$

या, $(x+2)(x+5)=0$ तथा $2+5=7$

अतः $x+2=0$ अथवा $x+5=0$

$\therefore$ $x=-2$ अथवा $x=-5$

उदाहरण 5. हल कीजिए :

समीकरण $x^2+x-6=0$

हल : $x^2+x-6=0$

या, $x^2+(3-2)x-6=0$

या, $x^2+3x-2x-6=0$

या, $x(x+3)-2(x+3)=0$

या, $(x+3)(x-2)=0$

अतः यदि $x + 3 = 0$ तो, $x = -3$

और यदि $x - 2 = 0$ तो $x = 2$

निम्नलिखित वर्ग समीकरण को देखिए—

(i) $(2x-3)(x+1)=0$

या, $2x^3+2x-3x-3=0$

या, $2x^3 - x - 3 = 0$

(ii) $(3x+4)(2x-5) = 0$

या, $6x^2 - 15x + 8x - 20 = 0$

या, $6x^2 - 7x - 20 = 0$

अतः हम देखते हैं कि यदि x^2 का गुणांक 1 न भी हो, तो भी उसके गुणनखण्ड करके हल प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 6. समीरकण $3x^2 + 10x + 8 = 0$ का हल कीजिए :

हल : $3x^2 + 10x + 8 = 0$

या, $3x + (4+6)x + 8 = 0$ — यहाँ $a = 3$, $b = 10$ तथा $c = 8$

या, $3x^2 + 4x + 6x + 8 = 0$ — $a \times c = 3 \times 8 = 24$

या, $x(3x+4) + 2(3x+4) = 0$ — $24 = 4 \times 6$

या, $(3x+4)(x+2) = 0$ — तथा $4 + 6 = 10$

अतः $3x + 4 = 0$ अथवा $x + 2 = 0$

जिससे $3x = -4$ अथवा $x = -2$

या, $x = -\dfrac{4}{3}$ अथवा $x = -2$

अतः $x = -\dfrac{4}{3}, -2$

समीकरण के अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 7. समीकरण $12x^2 - 11x - 15 = 0$ को हल कीजिए।

हल : $12x^2 - 11x - 15 = 0$

या, $12x^2 + (-20+9)x - 15 = 0$

या, $12x^2 - 20x + 9x - 15 = 0$ — यहाँ $a = 12$, $b = -11$ तथा $c = -15$

या, $4x(3x-5) + 3(3x-5) = 0$ — $a \times c = 12 \times (-15) = -180$

या, $(3x-5)(4x+3)=0$ $= -20 \times 9$

अतः $3x-5=0$ अथवा $4x+3=0$ तथा $20 + 9 = -11$

या, $3x=5$ अथवा $4x=-3$

या, $x=\frac{5}{3}$ अथवा $-\frac{3}{4}$

उदाहरण 8. समीकरण $3x^2-10x-8=0$ को हल कीजिए।

हल : $3x^2-10x-8=0$

$(-8) \times 3$ के ऐसे दो गुणनखण्ड कीजिए जिनका योग -10 हो तथा गुणनफल अर्थात् $(-8) \times 3 = -24$

$12 + 2 = -10$ और $-12 \times 2 = 24$

गुणनफल $= -24$

इस प्रकार, $3x^2-10x-8=0$

या, $3x^2+(-12+2)x-8=0$

या, $3x^2-12x+2x-8=0$

या, $3x(x-4)+2(x-4)=0$

या, $(x - 4) = 0$, तो $x = 4$

और यदि $3x + 2 = 0$ तो $3x = -2$

$$x=-\frac{2}{3}$$

अतः $x = 4$ और $x=-\frac{2}{3}$

उत्तर की जाँच : $x = 4$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$\begin{aligned}3x^2-10x-8 &= 3\times4^2-10\times4-8\\ &= 48-40-8\\ &= 48-48=0\\ &= \text{दायाँ पक्ष}\end{aligned}$$

और $x=\frac{-2}{3}$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$\begin{aligned}3x^2-10x-8 &= 3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-10\times\left(-\frac{2}{3}\right)-8\\ &= 3\times\frac{4}{9}+\frac{20}{3}-8\\ &= \frac{4}{3}+\frac{20}{3}-8\\ &= \frac{24}{3}-8=8-8=0\\ &= \text{दायाँ पक्ष}\end{aligned}$$

अतः उत्तर सही है।

(5) समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ आधारित साधारण वार्तिक प्रश्न

व्यावहारिक अनुप्रयोग के कुछ साधारण प्रश्नों को वर्ग समीकरण निर्धारित करके हल किया जा सकता है। कभी-कभी यह भी सम्भव हो सकता है कि समीकरण के दो मूलों में से केवल एक मूल ही प्रश्न का सार्थक उत्तर हो। समीकरण के उस मूल को जो प्रश्न के प्रतिबन्धों को सन्तुष्ट न करता हो, अस्वीकार कर देना चाहिए। आइए कुछ उदाहरणों द्वारा वार्तिक प्रश्नों को हल करने की विधा की चर्चा करें।

उदाहरण 9. दो क्रमागत संख्याओं का गुणनफल है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना दो क्रमागत संख्याएँ x तथा $(x + 1)$ है।

प्रश्नानुसार $x\ (x + 1) = 20$

या $x^2 + x = 20$

या $x^2 + x - 20 = 0$

या $x^2 + 5x - 4x - 20 = 0$

या $x\ (x + 5) -4\ (x + 5) = 0$

या $(x + 5)\ (x - 4) = 0$

या $x = 4$ या -5.

अतः अभीष्ट संख्याएँ 4 और 5 अथवा −5 व −4 हैं।

उदाहरण 10. 52 को ऐसे दो भागों में बाटिएँ जिनका गुणनफल 651 हो।

हल : माना पहला भाग $= x$

तथा दूसरा भाग $= 52 - x$

प्रश्नानुसार, पहला भाग $\times$ दूसरा भाग $= 651$

$x(52 - x) = 651$

या $52x - x^2 = 651$

या $x^2 - 52x + 651 = 0$

या $x^2 - 31x - 21x + 651 = 0$

या $x(x - 31) - 21(x - 31) = 0$

या $(x - 31)(x - 21) = 0$

यदि $x - 31 = 0$ तो $x = 31$

यदि $x - 21 = 0$ तो $x = 21$

$\therefore$ $x = 31, 21$

अतः 52 के अभीष्ट दो भाग 31 और 21 है।

मूल्यांकन :

1. यदि $\frac{x}{9} = \frac{25}{x}$ तो x के मान होंगे—

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) ± 5

(iii) $\pm\frac{3}{5}$ (iv) 15.

2. समीकरण $(x + 6)(x - 5) = 0$ में x का एक मान है—

(i) -5 (ii) -6

(iii) 1 (iv) 30

3. यदि $2x^2 + px - 4 = 0$ एक मूल 2 है तो p का मान होगा—

(i) -3 (ii) -2

(iii) 2 (iv) 4

4. यदि $\frac{1}{x^2 + 5} = \frac{1}{9}$ तो x का मान होगा—

(i) ± 1 (ii) ± 2

(iii) ± 3 (iv) ± 4.

5. यदि समीकरण $x^2 + kx + 3 = 0$ के एक मूल का मान 1 है तो k का मान होगा—

(i) 1 (ii) –3

(iii) –4 (iv) –5.

6. निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को हल कीजिए तथा उत्तर की जाँच कीजिए—

(i) $x^2 - 49 = 0$ (ii) $16x^2 - 9 = 0$

(iii) $\frac{4}{9}x^2 = 1$ (iv) $64p^2 = 25$

(v) $2x^2 - 18 = 0$ (vi) $\frac{x}{a} - \frac{a}{x} = 0$

7. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए तथा उत्तर की जाँच कीजिए—

(i) $3x^2 + 10x + 8 = 0$ (ii) $(2x - 3)(x + 2) = 0$

(iii) $x(x - 4) = 0$ (iv) $(2x + 1)(x + 3) + 3 = 0$

(v) $6x^2 - x = 1$ (vi) $4y^2 = 11y + 3$

8. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 225 वर्ग मीटर है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

9. किसी संख्या के वर्ग का तीन गुना 192 है। संख्या ज्ञात कीजिए।

10. दो क्रमागत धन पूर्णांकों को ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 545 है।

———

इकाई-14

दो अज्ञात राशि वाले रेखीय समीकरण (युगपत् समीकरण)

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नलिखित प्रकरणों की जानकारी होगी—

(1) दो अज्ञात राशियों वाले युगपत् समीकरण एवं उनके अनुप्रयोग

(2) दो अज्ञात राशियों वाले वार्तिक प्रश्नों का युगपत् समीकरणों द्वारा हल।

आप सभी लोग एक अज्ञात चर वाले रेखीय समीकरण को बनाना, हल करना तथा इसकी सत्यता की जाँच करने की विधि से अवगत हो चुके हैं। अब हम यहाँ पर दो अज्ञात चर वाले रैखिक समीकरण युग्म यथा $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ एवं $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के हल करने का अध्ययन करेंगे।

यहाँ समीकरणों $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ में x और y दो अज्ञात चर है तथा a_1, a_2, b_1, b_2 तथा c_1, c_2 अचर राशियाँ हैं। इस प्रकार के समीकरण को युगपत् समीकरण कहते हैं। युगपत् का अर्थ साथ-साथ होना। यहाँ हम देखेंगे कि प्रथम समीकरण में x के सापेक्ष y के विभिन्न मानों में से x और y के जो मान द्वितीय समीकरण को सन्तुष्ट करता है, वही युगपत समीकरण का हल होगा।

1. युगपत् समीकरण का हल

सर्वप्रथम हम निम्न तीन उदाहरणों पर ध्यान दें—

1. दो अज्ञात चर वाले रैखिक समीकरण $2x + y = 5$ और $3x - y = 10$ के हल पर विचार करें।

इनका हल ज्ञात करने के लिए दोनों समीकरणों के द्वारा x के विभिन्न मानों के सापेक्ष y के विभिन्न मानों को ज्ञात कर सारणीबद्ध करते हैं।

समीकरण $2x + y = 5$ में x के सापेक्ष y के मान की सारणी

x	1	2	3	4	0	–1	–2	–3	–4
y	3	1	–1	–3	5	7	9	11	13

समीकरण $3x - y = 10$ में x के सापेक्ष y के मान की सारणी

x	1	2	3	4	0	–1	–2	–3	–4
y	–7	–4	–1	2	–10	–13	–16	–19	–22

दोनों सारणियों को देखने से स्पष्ट है कि दोनों में केवल $x = 3$ और $y = -1$ उभयनिष्ठ है। अतः $x = 3$ और $y = -1$ समीकरणों $2x + y = 5$ और $3x - y = 10$ को सन्तुष्ट करते हैं। इसलिए $x = 3$ और $y = -1$ इन समीकरणों का हल हो गया।

2. अब हम समीकरण युग्म $x + 3y = 5$ और $2x + 6y = 10$ के हल पर विचार करें। यहाँ हम देखते हैं कि दोनों समीकरण एक-दूसरे से भिन्न नहीं हैं। पहले समीकरण के दोनों पक्षों में 2 से गुणा करने पर दूसरा समीकरण प्राप्त हो जाता है।

   अतः ये दोनों समीकरण स्वतन्त्र समीकरण नहीं हैं। बल्कि एक ही समीकरण को प्रदर्शित करते हैं, इसलिए x और y के अनन्त मान संतुष्ट करेंगे। यहाँ विशेष रूप से ध्यान देना है कि दो अज्ञात चर वाले समीकरण का अद्वितीय हल प्राप्त करने के लिए दो विशिष्ट समीकरणों की आवश्यकता होती है।

3. अंत में हम समीकरण युग्म $x + 3y = 5$ और $2x + 6y = 7$ पर विचार करें। यहाँ हम देखते हैं कि x और y का कोई मान जो समीकरण $x + 3y = 5$ को सन्तुष्ट करता है, $2x + 6y = 7$ को कदापि सन्तुष्ट नहीं करेगा। क्योंकि यदि x, y किसी मान के लिए $x + 3y = 5$ हो, तो $2x + 6y = 2(x + 3y) = 10$ होगा जो कदापि 7 नहीं हो सकता। अतः दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करने वाला x और y का कोई मान नहीं होगा।

इन उदाहरणों में हम देखते हैं कि केवल प्रथम स्थिति में ही समीकरणों का अद्वितीय हल प्राप्त होता है। यदि हम ध्यान दे तो पाते हैं कि प्रथम स्थिति में

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{3}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{-1} = -1$$

अर्थात् $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ जब कि बिन्दु 2 के अनुसार $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$

इस प्रकार

> दो अज्ञात चर वाले रैखिक समीकरणों $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ को युगपत् समीकरण कहते हैं यदि
>
> $$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

2. युगपत् समीकरण को हल करने की विधियाँ

युगपत् समीकरण को सारणी बनाकर हल करते समय हमने देखा कि सारणी बनाकर युगपत् समीकरणों को हल करने की विधि सुविधाजनक नहीं है। इसलिए प्रायः निम्नांकित दो विधियों का प्रयोग युगपत् समीकरण हल करने में किया जाता है— **(i) प्रतिस्थापन विधि** **(ii) विलोपन विधि**

(i) प्रतिस्थापन विधि—

इस विधि के अन्तर्गत हम एक समीकरण से एक अज्ञात चर का मान दूसरे अज्ञात चर के पद में व्यक्त करके उसे दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित कर दूसरे अज्ञात चर का मान ज्ञात करते हैं और फिर उस चर का मान किसी समीकरण में प्रतिस्थापित करके प्रथम अज्ञात चर को ज्ञात करते हैं। इसलिए इस विधि को **प्रतिस्थापन विधि** कहते हैं।

प्रथम विधि : (प्रतिस्थापन विधि)

उदाहरण 1. हल कीजिए

$x + 2y = 7$ ...(1)

$2x + y = 5$ ...(2)

हल : समीकरण (1) द्वारा

$x = 7 - 2y$ ...(3)

$\because$ समीकरण (1) तथा (2) युगपत् समीकरण हैं,

$\therefore$ समीकरण (1) से प्राप्त x का मान समीकरण (2) को सन्तुष्ट करना चाहिए।

अतः समीकरण (4) से प्राप्त x का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$2\ (7 - 2y) + y = 5$

या, $14 - 4y + y = 5$

या, $14 - 3y = 5$

या, $-3y = 5 - 14$ (पक्षान्तर करने पर)

या, $-3y = -9$ (चिन्ह बदलने पर)

या, $3y = 9$

या, $y = \frac{9}{3}$

$\therefore$ $y = 3$

अब y का यह मान समीकरण (3) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x = 7 - 2 \times 3$

$\quad = 7 - 6$

$\therefore \quad x = 1$

अतः युगपत् समीकरणों का हल $x = 1$ और $y = 3$ है।

सत्यापन : x और y के मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर—

बायाँ पक्ष $x + 2y = 1 + 2 \times 3$

$= 1 + 6$

$= 7$

= दायाँ पक्ष

$\therefore$ **बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष**

x और y के मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$2x + y = 2 \times 1 + 3 = 5$, अतः हल सही है।

उदाहरण 2. हल कीजिए—

$2x + 5y = 12 \qquad ...(1)$

$4x + 9y = 22 \qquad ...(2)$

हल : समीकरण (1) द्वारा

$2x = 12 - 5y$

$x = \frac{12 - 5y}{2} \qquad ...(3)$

x का यह मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$4\left(\frac{12 - 5y}{2}\right) + 9y = 22$$

या, $2\ (12 - 5y) + 9y = 22$

या, $24 - 10y + 9y = 22$

या, $24 - y = 22$

या, $y = 24 - 22$

$y = 2$

अब y का मान समीकरण (3) में रखने पर

$$x = \frac{12 - 5 \times 2}{2}$$
$$= \frac{12 - 10}{2}$$
$$= \frac{2}{2}$$
$$= 1$$

अतः उपर्युक्त युगपत् समीकरणों का हल $x = 1$ और $y = 2$ है।

सत्यापन : x और y के मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष $= 2x + 5y$
$= 2 \times 1 + 5 \times 2$
$= 2 + 10$
$= 12$

= दायाँ पक्ष

समीकरण (2) में x और y के मान प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष $= 4x + 9y$
$= 4 \times 1 + 9 \times 2$
$= 4 + 18$
$= 22$

= दायाँ पक्ष

अतः उत्तर सही है।

(ii) द्वितीय विधि (विलोपन विधि)

कभी-कभी दिये गये युगपत् समीकरणों को मात्र जोड़ने अथवा एक को दूसरे से घटाने पर एक चर का विलोप हो जाता है अर्थात् प्राप्त समीकरण में केवल एक अज्ञात चर रह जाता है, जिसे हल करने पर उसका मान ज्ञात हो जाता है। चर के प्राप्त इस मान को दिये गये किसी भी समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर दूसरे चर का मान ज्ञात हो जाता है। **इस प्रकार के युगपत् समीकरणों को हल करने की क्रिया को विलोपन विधि कहते हैं।**

यदि किसी भी चर के गुणांक समान (अथवा विपरीत चिह्न के साथ समान) न हों, तो किसी भी एक चर के गुणांकों को समान कर लेते हैं। शेष क्रिया उक्तवत होती है।

उदाहरण 3. हल कीजिए—

$x + y = 7$

$2x - y = 8$

हल : उपर्युक्त युगपत् समीकरणों में y के गुणांक दोनों समीकरणों में समान एवं विपरीत है, इसलिए दोनों समीकरणों को जोड़ने पर,

$$x + y = 7 \quad \ldots(1)$$
$$\underline{2x - y = 8} \quad \ldots(2)$$
$$3x = 15, \text{ } y \text{ का विलोपन हो गया}$$

$$x = \frac{15}{3} \text{ या } x = 5$$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$5 + y = 7$$
$$\therefore \quad y = 7 - 5$$
$$= 2$$

अतः समीकरण का हल $x = 5$ और $y = 2$ है।

सत्यापन :

समीकरण (1) में $x = 5$ और $y = 2$ प्रतिस्थापित करने पर,

बायाँ पक्ष $= 5 + 2 = 7 =$ **दायाँ पक्ष**

समीकरण (2) में $x = 5$ और $y = 2$ प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष $= 2 \times 5 - 2 = 10 - 2 = 8 =$ **दायाँ पक्ष**

उदाहरण 4. हल कीजिए—

$$x + 2y = 5 \quad \ldots(1)$$
$$x + 3y = 7 \quad \ldots(2)$$

हल : उपर्युक्त युगपत् समीकरणों में x के गुणांक दोनों समीकरणों में समान है। अतः समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर

$$-y = -2$$
$$\therefore \quad y = 2$$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$x + 2 \times 2 = 5$$

या, $x + 4 = 5$

या, $x = 5 - 4$

$$\therefore \quad x = 1$$

सत्यापन : समीकरण (1) में $x = 1$ और $y = 2$ प्रतिस्थापित करने पर,

$x + 2y = 1 + 2 \times 2 = 1 + 4 = 5 =$ **दायाँ पक्ष**

समीकरण (2) में $x = 1$ और $y = 2$ प्रतिस्थापित करने पर

$x + 3y = 1 + 3 \times 2 = 1 + 6 = 7 =$ **दायाँ पक्ष**

अतः युगपत् समीकरणों का हल सही है।

उदाहरण 4. हल कीजिए :

$3x + y = 5$ ...(1)

$5x + y = 9$ ...(2)

हल : चूँकि दोनों समीकरणों में y गुणांक समान हैं, इसलिए समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$-2x = -4$

या, $2x = 4$

$\therefore \quad x = 2$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$3 \times 2 + y = 5$ या $y = 5 - 6 = -1$

सत्यापन : समीकरण (1) में $x = 2$ और $y = -1$ प्रतिस्थापित करने पर

$3x + y = 3 \times 2 + (-1)$

$= 6 - 1$

$= 5 =$ **दायाँ पक्ष**

समीकरण (2) में $x = 2$ और $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$5x + y = 5 \times 2 + (-1)$

$= 10 - 1$

$= 9 =$ **दायाँ पक्ष**

अतः युगपत् समीकरणों का हल सही है।

उदाहरण 5. हल कीजिए—

$3x + y = 4$ ...(1)

$x + 2y = 3$ ...(2)

हल : उपर्युक्त युगपत् समीकरणों में x तथा y किसी के भी गुणांक बराबर नहीं है। अतः x के गुणांक बराबर करने के लिए समीकरण (2) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर

$3x + 6y = 9$ ...(3)

अब समीकरण (1) में से समीकरण (3) घटाने पर

$-5y = -5$

या, $5y = 5$

या, $y = \frac{5}{5}$

$y = 1$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$3x + 1 = 4$

या, $3x = 4 - 1$

या, $3x = 3$

या, $x = \frac{3}{3}$

$\therefore \quad x = 1$

अतः समीकरण का हल $x = 1$ तथा $y = 1$ है।

सत्यापन : समीकरण (1) में $x = 1$ और $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$3 \times 1 + 1 = 3 + 1 = 4 =$ **दायाँ पक्ष**

समीकरण (2) में $x = 1$ और $y = 1$ प्रतिस्थापित करने पर

$1 + 2 \times 1 = 3 =$ **दायाँ पक्ष**

अतः हल सही है।

टिप्पणी : ध्यान दें, जिस समीकरण में एक चर का मान प्रतिस्थापित करके दूसरे चर का मान ज्ञात किया जाता है, हल का सत्यापन करने के लिए उस समीकरण के मान प्रतिस्थापित करने की आवश्यकता नहीं है। दूसरे समीकरण में अज्ञात चरों के मान प्रतिस्थापित करके हल का सत्यापन करना पर्याप्त होगा।

उदाहरण 6. हल कीजिए :

$7x - 6y = 20$ ...(1)

$3x + 4y = 2$ ...(2)

हल : उपर्युक्त युगपत् समीकरणों में x तथा y किसी के भी गुणांक बराबर नहीं है। हम जानते हैं कि युगपत् समीकरणों के दोनों समीकरणों को जोड़कर या एक-दूसरे से घटा कर किसी अज्ञात का विलोप तभी कर सकते हैं, जब उस अज्ञात के गुणांक समान हों। अतः उपर्युक्त समीकरणों में y को

विलोप करने के लिए पहले y के गुणांक बराबर करते हैं। इसके लिये y के गुणांकों 6 और 4 का लघुत्तम समापवर्त्य 12 ज्ञात करते हैं। अब दोनों समीकरणों में y का गुणांक 12 करने के लिए, समीकरणों (1) के दोनों पक्षों में 2 से और समीकरण (2) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करते हैं।

अतः $14x - 12y = 40$ ...(3)

$9x + 12y = 6$ ...(4)

समीकरणों (3) और (4) को जोड़ने पर,

$$23x = 46$$

या, $$x = \frac{46}{23}$$

$\therefore \quad x = 2$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$7 \times 2 - 6y = 20$

या, $14 - 6y = 20$

या, $-6y = 20 - 14$

या, $-6y = 6$ (चिन्ह बदलने पर)

$$6y = -6$$

या, $$y = -\frac{6}{6}$$

$$y = -1$$

अतः समीकरणों का हल $x = 2$ और $y = -1$ है।

सत्यापन : समीकरण (2) में $x = 2$ और $y = -1$ प्रतिस्थापित करने पर

$3 \times 2 + 4 \times (-1) = 6 - 4 = 2 =$ **दायाँ पक्ष**

अतः हल सही है।

3. दो अज्ञात राशियों वाले वार्तिक प्रश्नों का युगपत् समीकरणों द्वारा हल

जिन वार्तिक प्रश्नों में दो शर्तें दी हुई होती हैं, उन्हें हल करने के लिए दो अज्ञात राशियों को x और y (या अन्य कोई बीज) मानकर दी हुई शर्तों के आधार पर दो रैखिक समीकरण प्राप्त करते हैं। प्राप्त समीकरणों को हल करके अज्ञात राशियों के मान ज्ञात कर लेते हैं। यद्यपि ऐसे वार्तिक प्रश्नों को एक चर वाले रैखिक समीकरणों द्वारा भी हल किया जा सकता है, परन्तु दो चर वाले रैखिक समीकरणों की सहायता से हल करना अधिक सरल और सुविधाजनक होता है।

उदाहरण 7. एक आयत की लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 5 सेमी. अधिक है। यदि आयत का परिमाप 40 सेमी. हो, तो इसकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : एक चर वाले रैखिक समीकरण की सहायता से—

मान लीजिए कि आयत की चौड़ाई $= x$ सेमी.।

चूँकि लम्बाई, उसकी चौड़ाई से 5 सेमी. अधिक है इसलिए

आयत की लम्बाई $= (x + 5)$ सेमी.।

अतः आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2\ (x + 5 + x)$ सेमी.

$= (4x + 10)$ सेमी.

परन्तु आयत का परिमाप 40 सेमी. ज्ञात है

$\therefore \quad 4x + 10 = 40$

या, $4x = 40 - 10$

या, $4x = 30$

$$\therefore\ x = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7.5$$

अतः आयत की चौड़ाई = 7.5 सेमी.

और इसकी लम्बाई = (7.5 + 5) सेमी.

= 12.5 सेमी.

अब इसे युगपत् समीकरण से हल करते हैं—

मान लीजिए कि आयत की लम्बाई x सेमी. और चौड़ाई y सेमी. है।

$\because$ लम्बाई, चौड़ाई से 5 सेमी. अधिक है

$\therefore \quad x - y = 5 \qquad \ldots(1)$

आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

$= 2\ (x + y)$ सेमी.

परन्तु आयत का परिमाप 40 सेमी. है।

$\therefore \quad 2\ (x + y) = 40$

या, $x + y = 20 \qquad \ldots(2)$

समीकरणों (1) तथा (2) को जोड़ने पर,

$2x = 25$

$\therefore\ x = \frac{25}{2} = 12.5$

x का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर,

$12.5 + y = 20$

$\therefore\ y = 20 - 12.5 = 7.5$

अतः आयत की लम्बाई = 12.5 सेमी.

और उसकी चौड़ाई = 7.5 सेमी.

सत्यापन : चूँकि लम्बाई = 12.5 सेमी. और चौड़ाई = 7.5 सेमी.

इसलिए लम्बाई, चौड़ाई से 5 सेमी. अधिक है।

आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौड़ाई)

= 2 (12.5 + 7.5) सेमी.

= 2 × 20 सेमी.

= 40 सेमी.

अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 8. 3 मेज और कुर्सी का मूल्य ` 1000 है और 5 मेज और कुर्सी का मूल्य ` 970 है। एक मेज और एक कुर्सी का अलग-अलग मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि एक मेज का मूल्य x रुपये और एक कुर्सी का मूल्य y रुपये है। इसलिए 3 मेज और 5 कुर्सी का मूल्य = ` $(3x + 5y)$

पहली शर्त के अनुसार ` $(3x + 5y)$ = ` 1000

$\therefore\ 3x + 5y = 1000$

और 5 मेज 2 कुर्सी का मूल्य = $(5x + 2y)$ रुपये

दूसरी शर्त के अनुसार ` $(5x + 2y)$ = ` 970

$\therefore\ 5x + 2y = 970$

अतः $3x + 5y = 1000$ ...(1)

$5x + 2y = 970$ ...(2)

समीकरण (1) के दोनों पक्षों में 5 से तथा समीकरण (2) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर,

$15x + 25y = 5000 \qquad ...(3)$

$15x + 6y = 2910 \qquad ...(4)$

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर,

$$19y = 2090$$

या, $$y = \frac{2090}{19}$$

$$y = 110$$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$3x + 5 \times 110 = 1000$

या, $3x + 550 = 1000$

या, $3x = 1000 - 550$

या, $3x = 450$

या, $$x = \frac{450}{3}$$

$$x = 150$$

अतः **एक मेज का मूल्य = ` 150**

तथा **एक कुर्सी का मूल्य = ` 110**

सत्यापन : 3 मेज और 5 कुर्सी का मूल्य = $(3 \times 150 + 5 \times 110)$ रुपए

= (450 + 550) रुपए

= 1000 रुपए

5 मेज और 2 कुर्सी का मूल्य = $(5 \times 150 + 2 \times 110)$ रुपए

= 970 रुपए

अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 9. यदि किसी आयत की लम्बाई 3 मीटर बढ़ा देने तथा चौड़ाई 4 मीटर कम कर देने से उसका क्षेत्रफल 72 वर्ग मीटर कम हो जाता है तथा लम्बाई 1 मीटर कम कर देने और चौड़ाई 4 मीटर बढ़ा देने से उसका क्षेत्रफल 88 वर्ग मीटर बढ़ जाता है, तो आयत की लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि आयत की लम्बाई = x मीटर

तथा चौड़ाई $= y$ मीटर

अतः आयत का क्षेत्रफल $= xy$ वर्ग मीटर

प्रथम शर्त के अनुसार

$$xy - (x + 3)(y - 4) = 72$$

या, $xy - xy - 3y + 4x + 12 = 72$

या, $4x - 3y = 60$ ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार

$$(x - 1)(y + 4) - xy = 88$$

या, $xy - y + 4x - 4 - xy = 88$

या, $4x - y = 92$ ...(2)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर

$$-2y = -32$$

या, $2y = 32$

या, $y = \frac{32}{2}$

$y = 16$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$4x - 3 \times 16 = 60$$

या, $4x - 48 = 60$

या, $4x = 60 + 48$

या, $4x = 108$

या, $x = \frac{108}{4}$

$x = 27$

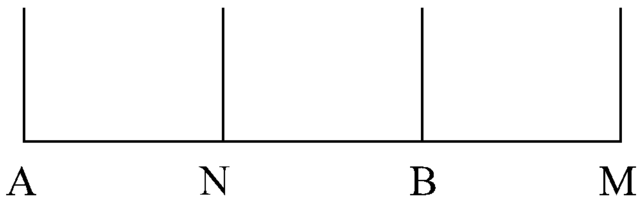
अतः आयत की लम्बाई 27 मीटर तथा चौड़ाई 16 मीटर है।

सत्यापन : उत्तर का स्वयं सत्यापन कीजिए।

उदाहरण 10. दो स्थान A और B एक-दूसरे से 90 किमी. दूर हैं। दो कारें एक साथ A और B से चलना प्रारम्भ करती हैं। यदि दोनों कारें एक ही दिशा में चलती हैं तो वे 9 घण्टे बाद

एक-दूसरे से मिलती हैं और यदि विपरीत दिशाओं में चलती हैं तो वे $\frac{9}{7}$ घण्टे में मिलती हैं। उनकी चाल ज्ञात कीजिए।

हल :



मान लीजिए कि A से चलने वाली कार की चाल $= x$ किमी./घण्टा

और B से चलने वाली कार की चाल $= y$ किमी./घण्टा

पहली शर्त के अनुसार

दोनों कारें स्थान M पर मिलेगी :

अतः $AM - BM = AB$

(9 घण्टे में A से चली कार द्वारा तय की गयी दूरी) – (9 घण्टे में B से चली कार द्वारा तय की गयी दूरी) = 90 किमी.

इसलिए $9x - 9y = 90$

या, $x - y = 10$ ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार

दोनों कारें स्थान N पर मिलेंगी।

अतः $AN + BN = 90$ किमी

($\frac{9}{7}$ घण्टे में A से चली कार द्वारा तय की गयी दूरी $+\frac{9}{7}$ घण्टे में B से चली कार द्वारा तय की गयी दूरी।) = 90 किमी

इसलिए $\frac{9}{7}x+\frac{9}{7}y=90$

या, $x + y = 70$ ...(2)

समीकरण (1) में समीकरण (2) जोड़ने पर

$$2x = 80$$

या, $$x = \frac{80}{2}$$

$$x = 40$$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$$40 - y = 10$$

या, $y = 40 - 10$

$\therefore$ $y = 30$

अतः ***A* से चलने वाली कार की चाल = 40 किमी./घण्टा**

तथा ***B* से चलने वाली कार की चाल = 30 किमी./घण्टा**

(उत्तर का सत्यापन प्रशिक्षु स्वयं करें)

उदाहरण 11. राम और श्याम की आय का अनुपात 4 : 3 है तथा उनके व्यय में अनुपात 3 : 2 है। यदि प्रत्येक 5000 रुपये मासिक बचत करता है तो उनकी अलग-अलग आय बताइए।

हल : मान लीजिए कि राम की मासिक आय = x रुपये

तथा श्याम की मासिक आय = y रुपये

पहली शर्त के अनुसार

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

या, $3x = 4y$

या, $3x - 4y = 0$ ...(1)

राम द्वारा व्यय की गई धनराशि = $(x - 5000)$ रुपये

तथा श्याम द्वारा व्यय की गई धनराशि = $(y - 5000)$ रुपये

दूसरी शर्त के अनुसार

$$\frac{x - 5000}{y - 5000} = \frac{3}{2}$$

या, $2(x - 5000) = 3(y - 5000)$

या, $2x - 10000 = 3y - 15000$

या, $2x - 3y = 10000 - 15000$

या, $2x - 3y = -5000$ ...(2)

समीकरण (1) को 2 से गुणा करने तथा समीकरण (2) को 3 से गुणा करने पर

$6x - 8y = 0$ ...(3)

$6x - 9y = -15000$ ...(4)

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर

$y = 15000$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$3x - 4 \times 15000 = 0$

$\therefore \quad 3x = 60000$

$\therefore \quad x = 20000$

अतः **राम की मासिक आय = 20000 रुपये**

तथा **श्याम की मासिक आय = 15000 रुपये**

(उत्तर का सत्यापन प्रशिक्षु स्वयं करें।)

उदाहरण 12. 700 को ऐसे दो भागों में बाँटिए कि एक भाग का 40% दूसरे भाग के 60% से 80 अधिक हो।

हल : मान लीजिए कि पहला भाग $= x$

तथा दूसरा भाग $= y$

पहली शर्त के अनुसार

$x + y = 700$ ...(1)

पहले भाग का $40\% = x \times \frac{40}{100}$

$= \frac{2x}{5}$

दूसरे भाग का $60\% = y \times \frac{60}{100}$

$= \frac{3y}{5}$

दूसरी शर्त के अनुसार

$$\frac{2x}{5} - \frac{3y}{5} = 80$$

या, $2x - 3y = 400$ ...(2)

समीकरण (1) को 2 से गुणा करने पर,

$2x + 2y = 1400$ ...(3)

समीकरण (2) में समीकरण (3) को घटाने पर

$-5y = -1000$

$5y = 1000$ (चिन्ह बदलने पर)

या, $y = \frac{1000}{5}$

$\therefore$ $y = 200$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$x + 200 = 700$

या, $x = 700 - 200$

$\therefore$ $x = 500$

अतः **700 के दो भाग 500 तथा 200 हैं।**

(उत्तर का सत्यापन प्रशिक्षु स्वयं करें।)

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दैनिक जीवन से सम्बन्धित निम्नांकित प्रकार की समस्याओं को युगपत् समीकरणों की सहायता से हल किया जा सकता है—

(i) संख्या सम्बन्धी प्रश्न

(ii) भिन्न सम्बन्धी प्रश्न

(iii) आयु सम्बन्धी प्रश्न

(iv) ज्यामिति सम्बन्धी प्रश्न

(v) अनुपात सम्बन्धी प्रश्न

(vi) प्रतिशत सम्बन्धी प्रश्न

आइए उपरोक्त प्रकार के प्रश्नों की चर्चा की जाए।

(i) अंक सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 13. दो अंकों की एक संख्या की दहाई का अंक इकाई के अंक से 3 कम है। यदि संख्या अंकों के जोड़ की चार गुनी हो, तो वह संख्या बताइए।

हल : मान लीजिए कि संख्या के दहाई का अंक $= x$

तथा इकाई का अंक $= y$

अतः संख्या का मान $= 10x + y$

पहली शर्त के अनुसार

$x = y - 3$

या $x - y = -3$ ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार,

$10x + y = 4(x + y)$

या, $10x + y = 4x + 4y$

या, $10x - 4x + y - 4y = 0$

या, $6x - 3y = 0$ ...(2)

समीकरण (1) को 6 गुणा करने पर,

$6x - 6y = -18$ ...(3)

समीकरण (2) से समीकरण (3) को घटाने पर,

$3y = 18$

या, $y = \frac{18}{3}$

$\therefore$ $y = 6$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x - 6 = -3$

या, $x = 6 - 3$

$\therefore$ $x = 3$

अतः संख्या $= 36$

उत्तर का सत्यापन प्रशिक्षु स्वयं करें।

(ii) भिन्न सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 14. यदि किसी भिन्न के अंश और हर में से क्रमशः 1 घटा दें, तो नयी भिन्न का मान $\frac{1}{5}$ हो जाती है। यदि उसके अंश और हर में क्रमशः 1 जोड़ दें तो नयी भिन्न का मान $\frac{1}{3}$ होता है। वह भिन्न बताइए।

हल : मान लीजिए कि भिन्न $\frac{x}{y}$ है।

पहली शर्त के अनुसार

$$\frac{x-1}{y-1}=\frac{1}{5}$$

या, $5(x-1) = y - 1$

या, $5x - 5 = y - 1$

या, $5x - y = 5 - 1$

या, $5x - y = 4$ ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार

$$\frac{x+1}{y+1}=\frac{1}{3}$$

या, $3(x+1) = y + 1$

या, $3x + 3 = y + 1$

या, $3x - y = 1 - 3$

या, $3x - y = -2$ ...(2)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$$2x = 6$$

या, $x=\frac{6}{2}$

$$x = 3$$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर

$5 \times 3 - y = 4$

या, $15 - y = 4$

या, $-y = 4 - 15$

$-y = -11$ (चिन्ह बदलने पर)

$y = 11$

अतः भिन्न $\frac{3}{11}$ है।

उत्तर का सत्यापन प्रशिक्षु स्वयं करें।

(iii) आयु सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 15.5 वर्ष पहले पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की 3 गुनी थी। 10 वर्ष बाद पिताकी आयु अपने पुत्र की आयु की दो गुनी हो जायेगी। पिता और पुत्र की वर्तमान आयु बताइए।

हल : मान लीजिए कि पिता की वर्तमान आयु $= x$ वर्ष

और पुत्र की वर्तमान आयु $= y$ वर्ष

5 वर्ष पूर्व पिता की आयु $= (x - 5)$ वर्ष

5 वर्ष पूर्व पुत्र की आयु $= (y - 5)$ वर्ष

10 वर्ष पश्चात् पिता की आयु $= (x + 10)$ वर्ष

10 वर्ष पश्चात् पुत्र की आयु $= (y + 10)$ वर्ष

पहली शर्त के अनुसार,

$x - 5 = 3 (y - 5)$

या, $x - 5 = 3y - 15$

या, $x - 3y = 5 - 15$

या, $x - 3y = -10$ ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार,

$x + 10 = 2 (y + 10)$

या, $x + 10 = 2y + 20$

या, $x - 2y = 20 - 10$

या, $x - 2y = 10$ ...(2)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$-y = -20$

या, $y = 20$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$x - 3 \times 20 = -10$

या, $x - 60 = -10$

या, $x = 60 - 10$

$x = 50$

अतः **पिता की वर्तमान आयु = 50 वर्ष**

पुत्र की वर्तमान आयु = 20 वर्ष

(उत्तर का सत्यापन प्रशिक्षु स्वयं करें)

(iv) ज्यामिती सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 16. समान्तर चतुर्भुज $ABCD$ के $\angle A$ तथा $\angle B$ में अनुपात 1 : 2 है। चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि

$\angle A = x°$, अंश $\angle B = y°$ (आगे हल में $x°$ तथा $y°$ के स्थान पर ($x°$ तथा $y°$) के स्थान पर y लिखा जायेगा)

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

या, $2x = y$

$2x - y = 0$ ...(1)

चूँकि $ABCD$ एक समान्तर चतुर्भुज है, इसलिए

$\angle A + \angle B = 180°$ (समान्तर चतुर्भुज के संलग्न कोणों का योग A होता है।)

या, $x° + y° = 180°$

$x + y = 180°$ ...(2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोड़ने पर,

$$3x = 180$$
$$\therefore\ x = 60$$
$$\therefore\ y = 2x = 2 \times 60 = 120$$
$$\angle A = 60°, \quad \angle B = 120°$$

चूँकि समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं,

$\therefore \quad \angle C = \angle A = 60°$

तथा $\angle D = \angle B = 120°$

(उत्तर का सत्यापन प्रशिक्षु स्वयं करें।)

मूल्यांकन

1. समीकरण $2x + 4y = 6$ में x का मान y के पदों में होगा—

   (i) $6 - 4y$ (ii) $3 - 2y$

   (iii) $6 + 4y$ (iv) $3 + y$

2. समीकरण $x + y = 4$ तथा समीकरण $5x + 12y = 7$ को हल करने पर x और y का मान होगा—

   (i) $x=\frac{41}{7}, y=\frac{-13}{7}$ (ii) $x=\frac{-41}{7}, y=\frac{-13}{7}$

   (iii) $x = 2, y = 2$ (iv) $x = 5, y = -1$

3. समीकरण $x + y = 3$ तथा समीकरण $x - y = 1$ को हल करने पर x व y का मान है—

   (i) $x = 1, y = 2$ (ii) $x = 2, y = 1$

   (iii) $x = 4, y = -1$ (iv) $x = 3, y = 2$

4. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए—

   (i) $2x - 3y = 13, 7x - 2y = 20$

   (ii) $\frac{x}{7}+\frac{y}{15}=3, \frac{x}{2}-\frac{y}{5}=4$

   (iii) $2x - 5y - 16 = 0, 3x + 4y - 1 = 0$

   (iv) $3x - y = 4, 2x - y = 2$

5. दो अंकों की एक संख्या के दहाई का अंक, इकाई के अंक का दूना है। यदि अंकों के स्थान बदल दिये जायँ तो नई संख्या पहले से 36 कम हो जायेगी, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

6. यदि किसी भिन्न के हर में 1 जोड़ दिया जाये तो वह $\frac{1}{2}$ के बराबर हो जाती है और यदि अंश में 1 जोड़ दिया जाये तो भिन्न 1 के बराबर हो जाती है, तो वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

7. पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की 3 गुनी है। 2 वर्ष बाद पिता अपने पुत्र की आयु का 2 गुना हो जायेगा। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

8. एक त्रिभुज के दो कोणों में अनुपात 5:4 है। यदि उनमें से एक कोण दूसरे कोण से 10° अधिक हो, तो उसके कोण ज्ञात कीजिए।

9. दो कोटिपूरक कोण इस प्रकार है कि छोटा कोण दूसरे के $\frac{3}{5}$ गुने से 10° अधिक है। कोणों को ज्ञात कीजिए।

10. 3 कुर्सी और 2 मेज का मूल्य ` 700 है और 5 कुर्सी तथा 3 मेजों का मूल्य ` 1100 है। एक कुर्सी और एक मेज का मूल्य अलग-अलग ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-15

समलम्ब का क्षेत्रफल

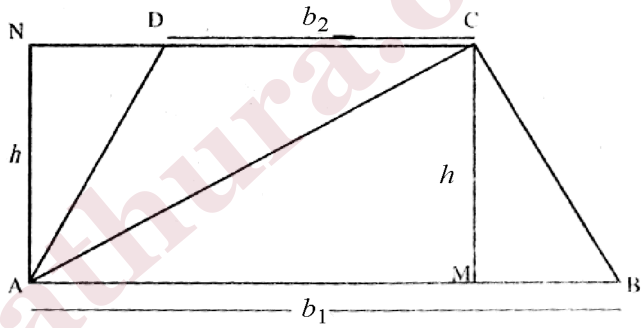
इस इकाई के अध्ययन से प्रशिक्षुओं को समलम्ब का क्षेत्रफल निकालने की जानकारी होगी।

(1) समलम्ब का क्षेत्रफल

इन्हें देखिए और निष्कर्ष निकालिए

पार्श्वांकित चित्र समलम्ब $ABCD$ को देखिए।

इन चतुर्भुज में $AB \parallel DC$ तथा AD और BC असमान्तर भुजाएँ हैं। समान्तर भुजाओं AB और DC में से किसी एक भुजा को समलम्ब का आधार कहते हैं। इन समान्तर भुजाओं के बीच की लम्बवत् दूरी को समलम्ब की ऊँचाई कहा जाता है। चित्र में इस ऊँचाई को $AN = CM = h$ से प्रदर्शित किया गया है।



हम देखते हैं कि विकर्ण AC द्वारा समलम्बीय क्षेत्र $ABCD$ को दो त्रिभुजकीय क्षेत्र ABC और ACD में बाँट दिया गया है।

अतः समलम्ब $ABCD$ का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

मान लिया $AB = b_1$ और $DC = b_2$

Δ ABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} b_1 \times h$

और Δ ADC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} b_2 \times h$

$\therefore$ समलम्ब $ABCD$ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h$

$$= \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$$

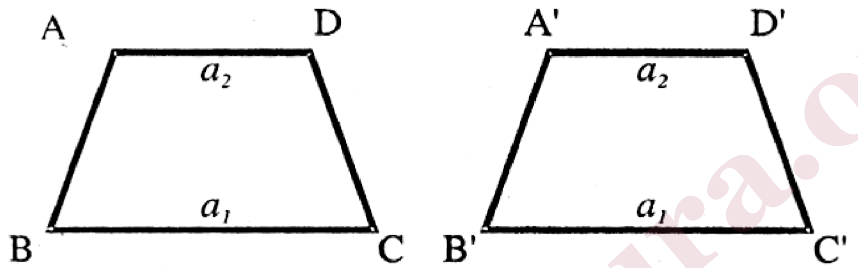
अतः

समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

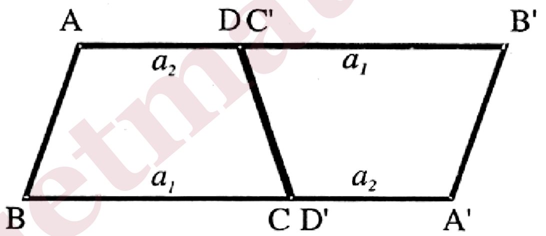
इन्हें भी देखिए, चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

दूसरी विधि

मोटे कागज पर समलम्ब $ABCD$ को काट कर, इसी के बराबर एक और समलम्ब A, B, C, D को काट लिया जाय।



अब निम्नांकित चित्र के अनुसार दोनों को एक-दूसरे के पास उलट कर इस प्रकार रखें कि बिन्दु C' बिन्दु D पर तथा D' बिन्दु C पर पड़े।



उपर्युक्त चित्र को देखकर बताइए कि किस प्रकार की आकृति बनी?

दो समान समलम्ब से मिलकर एक समान्तर चतुर्भुज बनता है।

$\therefore$ एक समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

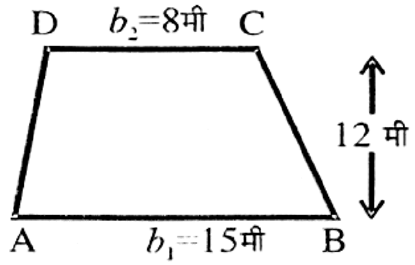
$= \frac{1}{2}$ (आधार × संगत ऊँचाई)

$= \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \times$ संगत ऊँचाई)

समलम्ब का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) × ऊँचाई

उदाहरण 1. समलम्ब की समान्तर भुजाएँ 15 मी. और 8 मी. हैं, उनके बीच की दूरी 12 मी. है। समलम्ब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल :



समलम्ब का क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \times h$

यहाँ B_1 = 15 मी. B_2 = 8 मी. और h = 12 मी.

अतः $A = \frac{1}{2}(15+8) \times 12$ मी.^{2}

= 138 मी.^{2}

उदाहरण 2. ऊँचाई 3 सेमी. वाले एक समलम्ब का क्षेत्रफल 12 सेमी.^{2} है। यदि समान्तर भुजाओं में से एक 3 सेमी. हो, तो दूसरी की लम्बाई क्या है?

हल : हम जानते हैं कि समलम्ब के लिए

क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}(b_1 + b_2) \times h$

यहाँ क्षेत्रफल = 12 सेमी.^{2}, h = 3 सेमी.

$$\therefore\ b_1 + b_2 = \frac{2 \times \text{क्षेत्रफल}}{h}$$
$$= \frac{2 \times 12}{3} \text{सेमी.}$$
$$= 8 \text{सेमी.}$$

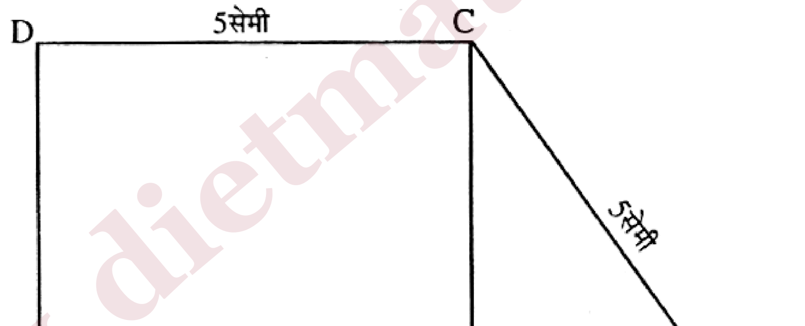
किन्तु b_2 = 3 सेमी.

$\therefore$ b_1 = 8 सेमी. −3 सेमी. = 5 सेमी.

अतः समलम्ब की दूसरी भुजा 5 है।

मूल्यांकन

1. एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 2 सेमी. और 4 सेमी. है। इनके बीच की दूरी 2 सेमी. है। इसका क्षेत्रफल होगा—
   (i) 6 वर्ग सेमी.
   (ii) 8 वर्ग सेमी.
   (iii) 4 वर्ग सेमी.
   (iv) 2 वर्ग सेमी.
2. एक समलम्ब की समान्तर भुजाएँ 3 सेमी. और 4 सेमी. हैं। इनके बीच की दूरी 3 है। क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. 3 सेमी. ऊँचाई के समलम्ब का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी. है। इसकी समान्तर भुजाओं में से एक भुजा की लम्बाई 9 सेमी. है। दूसरी समान्तर भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
4. निम्नांकित चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel CD$ और $AD \perp AB$, $AB = 8$ सेमी., $BC = DC = 5$ सेमी.। क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



5. एक समलम्ब की समान्तर भुजाएँ 8 मी. और 6 मी. है और इसकी ऊँचाई 4 मी. है। क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-16
वृत्त की परिधि और व्यास में सम्बन्ध

प्रयास कीजिए

पार्श्वांकित चित्र को देखिए तथा निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए—

(i) वृत्त का केन्द्र कौन सा बिन्दु है?

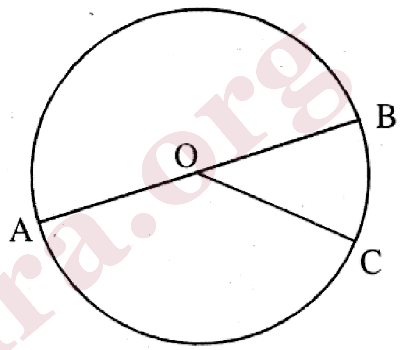
(ii) वृत्त की त्रिज्याओं के नाम बताइए।

(iii) वृत्त का व्यास बताइए।

(iv) वृत्त की त्रिज्या और व्यास में सम्बन्ध बताइए।

(v) यदि वृत्त की त्रिज्या r हो, तो वृत्त का व्यास r के पदों में अभिव्यक्त कीजिए।

(vi) यदि वृत्त का व्यास d हो, तो वृत्त की त्रिज्या कितनी होगी।



करीम ने अपने तांगे की पहियों पर 112 सेमी व्यास की हाल लगवाने के लिए गोपी लुहार से पूछा कि हाल के लिए लोहे की कितनी लम्बी पट्टी लगेगी?

गोपी लोहे की पट्टी की लम्बाई हाल तैयार करने से पहले ज्ञात कर सकता है, क्योंकि वृत्त की परिधि और व्यास में एक निश्चित अनुपात होता है।

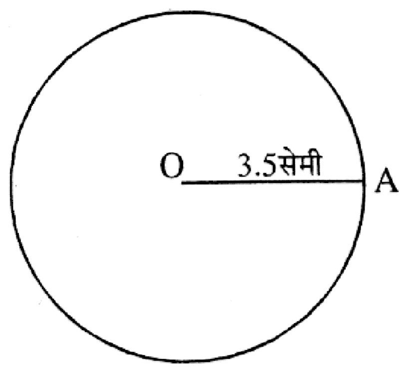
इन अनुपात को नीचे दिये गये प्रयोगों से ज्ञात कर सकते हैं।

इन्हें कीजिए

क्रिया विधि

(i) परकार और पेंसिल की सहायता से दफ्ती पर 3.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। कैंची की सहायता से वृत्ताकार पटल को काट लीजिए।

(ii) टेप अथवा धागे की सहायता से वृत्ताकार पटल की परिधि को नापिए।



नापने पर वृत्त की परिधि = 22 सेमी (लगभग)

वृत्त का व्यास = 7 सेमी

इस प्रकार वृत्त की परिधि और व्यास में अनुपात लगभग निम्नांकित है—

$$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{22}{7} = 3.14 \text{ (लगभग)}$$

इन्हें भी कीजिए

दफ्ती पर इसी प्रकार भिन्न-भिन्न माप के तीन से अधिक वृत्त और बनाइए। कैंची से वृत्ताकार पटलों को काटिए। इन वृत्ताकार पटलों की परिधि और व्यास को माप कर निम्नांकित सारिणी को पूरा कीजिए।

क्रम संख्या	वृत्त की परिधि की माप सेमी में	वृत्त के व्यास की माप सेमी में	$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$
1.			
2.			
3.			

उपर्युक्त सारिणी में हम देखते हैं कि वृत्तों की परिधि और व्यास का अनुपात लगभग $\frac{22}{7}$ है।

इस प्रकार उपरोक्त प्रयोगों से दो निष्कर्ष निकलते हैं।

(i) वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात सभी वृत्तों के लिए लगभग एक ही होती है, चाहें इनकी माप कुछ भी क्यों न हो।

(ii) $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ से प्राप्त संख्या, जो सभी वृत्तों के लिए लगभग एक ही होती है, का मान लगभग 3.14 होता है।

इस अनुपात को यूनानी भाषा के वर्णाक्षर π (पाई) द्वारा व्यक्त करते हैं। यह अपरिमेय संख्या है, परन्तु गणना हेतु इसका मान परिमेय संख्या $\frac{22}{7}$ के लगभग लिया जाता है।

π (पाई) का चार स्थान तक शुद्ध मान 3.1416 है जिसे भारती गणितज्ञ आर्यभट्ट ने ज्ञात किया था। 3.1416 का शुद्धतम मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है, क्योंकि π अपरिमेय संख्या है।

टिप्पणी—गणितज्ञों ने यह तथ्य काफी पहले ही जान लिया था कि वृत्तों की माप से स्वतंत्र, अनुपात $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ सभी वृत्तों के लिए एक ही होता है। तथापि इसे सिद्ध बहुत बाद में किया गया, तब

जबकि वक्र की लम्बाई की धारणा को ही एक नया अर्थ दिया गया। ऊँची कक्षाओं में जाने पर आप इसकी उत्पत्ति सीखेंगे। अभी तो आपके द्वारा प्रयोगों के आधार पर प्राप्त परिणाम को ही बिना उपपत्ति के सत्य स्वीकार किया जा सकता है।

अर्थात

$$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$$

या, **परिधि** $= \pi$ **व्यास**

या, **परिधि** $= 2\pi r$ (r वृत्त की त्रिज्या है।)

संख्या π परिमेय नहीं है।

यह तथ्य एक जर्मन गणितज्ञ जोहान्न लैम्बर्ट ने बहुत समय बाद 1766 में सिद्ध किया।

आरम्भ के गणितज्ञ π का कोई सन्निकट मान प्रयुक्त करते थे। बेबीलोनियनों ने इस अनुपात (अर्थात π) को 3 माना आरम्भ के यूनानियों ने π को $\frac{22}{7}$ या 3.14 माना। आर्किमिडीज (ईसा-पूर्व तीसरी शताब्दी) ने दिखाया कि π मान $3\frac{1}{7}$ तथा $3\frac{10}{71}$ के मध्य स्थित है। एक श्रेष्ठतर सन्निकट मान एक भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476 ई.-150 ई.) ने दिया। इस मान के विषय में उन्होंने यह नियम दियाः 100 में चार जोड़िए, 8 से गुणा कीजिए, 62000 जोड़िए, परिणाम व्यास 20000 वाले वृत्त की परिधि का सन्निकट मान होगा। इस प्रकार उन्होंने π का सन्निकट मान दिया।

$$\frac{62832}{20000} \text{ या } 3.1416$$

आर्यभट्ट पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने चार स्थानों तक π का शुद्ध मान दिया। अब कम्प्यूटर की सहायता से π का सन्निकट मान ऐसी संख्या ज्ञात की जा चुकी है जो दशमलव के पाँच लाख स्थानों तक शुद्ध है। 20 स्थान तक शुद्ध π का मान है।

3.14159265358979323846

आगे यदि अन्यथा न कहा गया हो तो हम गणना के लिए π का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 लिया करेंगे।

अतः π को एक संकेत मानकर परिधि व व्यास तथा परिधि व त्रिज्या में सम्बन्ध निम्नांकित हैं।

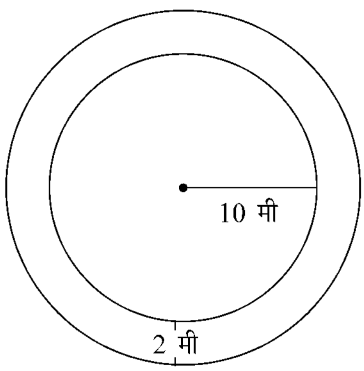
(1) यदि एक वृत्त की परिधि (Circumference) C तथा उसका व्यास (diameter) d हो, तो $C = \pi d$ तथा $d = \frac{C}{\pi}$

(2) यदि एक वृत्त की परिधि C तथा उसकी त्रिज्या (radius) r हो, तो $C = 2\pi r$ तथा $r = \frac{C}{2\pi}$

टिप्पणी—चूँकि सभी संख्यात्मक परिकलनों में हम π के एक सन्निकट मान का प्रयोग करेंगे, अतः यह परिणाम, अर्थात C अथवा r का प्राप्त मान केवल एक सन्निकट मान है, चाहे इसे स्पष्ट कहा जाय या नहीं।

मूल्यांकन

1. एक वृत्त की त्रिज्या 5.2 सेमी. उसके व्यास की माप बताइए।
2. 3 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए इसकी परिधि की माप ज्ञात कीजिए।
3. एक वृत्ताकार तालाब का परिमाप 132 मीटर है। इसका व्यास ज्ञात कीजिए।
4. सम्मुख चित्र में वृत्ताकार पार्क की त्रिज्या 10 मीटर है। इसके बाहर 2 मीटर चौड़ा वृत्ताकार मार्ग बनाया गया है। इस वृत्ताकार मार्ग का बाहरी परिमाप ज्ञात करो।



5. एक वृत्त का व्यास 14 सेमी है उसकी परिधि होगी—

(i) 28 सेमी (ii) 44 सेमी

(iii) 44 मी (iv) 88 सेमी

6. एक पहिए का व्यास 70 सेमी है उसके द्वारा एक चक्कर लगाने में चली गई दूरी होगी—

(i) 110 सेमी (ii) 220 सेमी

(iii) 100 सेमी (iv) 200 सेमी

7. एक पहिए की परिधि 320 सेमी है। पहिए द्वारा पूरे पाँच चक्कर सड़क पर लगने पर उसके द्वारा तय की गई दूरी होगी—

(i) 160 मी (ii) 16 मी

(iii) 160 सेमी (iv) 32 मी

8. एक वृत्त की परिधि 11 सेमी है उसकी त्रिज्या होगी—

(i) 3.5 सेमी (ii) 1.75 सेमी

(iii) 5.5 सेमी (iv) 7 सेमी

———

इकाई-17

वृत्त का क्षेत्रफल

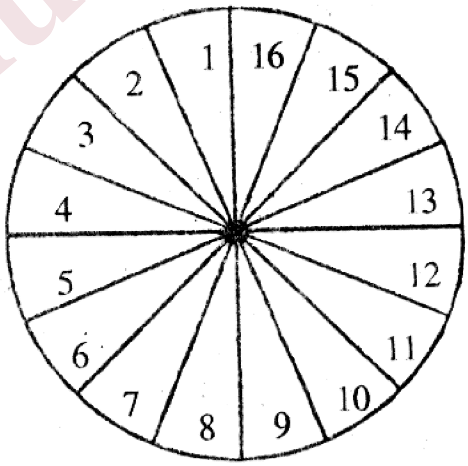
आप आयताकार क्षेत्र का मान सूत्र की सहायता (क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई) से ज्ञात करना जानते हैं। अन्य किसी भी आकृति का क्षेत्रफल आयत की सहायता से ज्ञात किया जाता है।

इन्हें कीजिए और निष्कर्ष लिखिए :

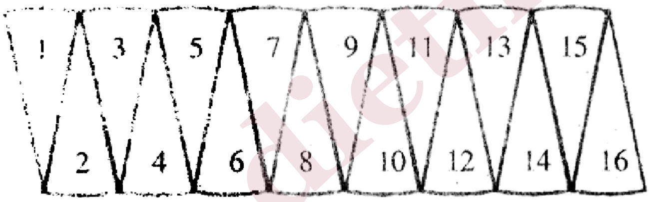
क्रिया कलाप-1

मोटे कागज पर एक वृत्त बनाइए। इस वृत्त की परिधि को 16 बराबर भागों में बाँटिए। त्रिज्याओं को खींचिए और देखिए वृत्तीय क्षेत्र चित्रानुसार 16 त्रिज्यखण्डों में विभक्त हो गया है। इन त्रिज्यखंडों पर क्रम से 1 से 16 तक के अंक अंकित कीजिए। प्रत्येक भाग को काट कर अलग कीजिए।

इन त्रिज्यखण्डों को दो बराबर समूहों में बाँट लीजिए। एक समूह के शीर्ष नीचे तथा दूसरे समूह के शीर्ष ऊपर की ओर रख कर निम्नांकित चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए।



यह आयताकार क्षेत्र की भाँति दिखाई दे रहा है किन्तु ठीक-ठीक आयत नहीं है। क्यों?



यदि इसी प्रकार से और अधिक त्रिज्यखंड करके व्यवस्थित करने की कल्पना करें तो हम आयताकार क्षेत्र के बिल्कुल पास होंगे। इस प्रकार वृत्तीय क्षेत्र आयताकार क्षेत्र के बराबर होगा।

आयताकार क्षेत्र की लम्बाई वृत्त की परिधि की आधी होगी और चौड़ाई वृत्त की त्रिज्या होगी। क्यों?

मान लिया वृत्त की त्रिज्या $= r$ सेमी

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ सेमी

$\frac{1}{2}$ (वृत्त की परिधि) $= \pi r$ सेमी

आयताकार क्षेत्र की लम्बाई $= \pi r$ सेमी

आयताकार क्षेत्र की चौड़ाई $= r$ सेमी

आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \pi r \times r$ सेमी^{2}

$= \pi r^2$ सेमी^{2}

अतः वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ सेमी^{2}

वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi \times$ (त्रिज्या)^2

मूल्यांकन

1. घास के मैदान में एक खूँटे से बँधी एक गाय 14 मी. दूरी तक चर सकती है। वह कितने क्षेत्रफल की घास चर सकती है?
2. एक वृत्ताकार फर्श का क्षेत्रफल 66 वर्ग मीटर है। फर्श का व्यास ज्ञात कीजिए।
3. त्रिज्या 14.7 सेमी वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या 49 मी. है। मैदान के बाहर चारों ओर 7 मी. चौड़ी सड़क बनी है। सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
5. 35 सेमी भुजा की लोहे की वर्गाकाल चादर से लोहार बड़े से बड़ा वृत्ताकार समतलीय तवा तैयार करता है। तवे का क्षेत्रफल ज्ञात करो। कितनी चादर बचेगी?
6. एक अर्ध वृत्ताकार साइनबोर्ड की रंगाई का खर्च 15 पैसा प्रति वर्ग सेमी की दर से ` 49.50 है। साइनबोर्ड का क्षेत्रफल ज्ञात करो।
7. एक वृत्त का क्षेत्रफल दूसरे वृत्त के क्षेत्रफल का 64 गुना है उनकी परिधियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।
8. एक प्लास्टिक की आयताकार शीट 36 सेमी × 24 सेमी माप की है। इसमें से 1 सेमी व्यास के 868 वृत्ताकार बटन काट कर निकाल लिए गये हैं। बची शीट का क्षेत्रफल बताइये।
9. दो वृत्तों के क्षेत्रफलों में 1:4 का अनुपात है। उनकी व्यास का अनुपात होगा—

   (i) 1:2 (ii) 2:2

   (iii) 1:4 (iv) 1:1
10. दो वृत्तों के व्यास में 2:3 का अनुपात है उनके क्षेत्रफलों में अनुपात होगा—

    (i) 9:4 (ii) 4:9

    (iii) 2:3 (iv) 3:2

———

इकाई-18

चतुर्भुज का अर्थ, इसके विकर्ण, संलग्न भुजाएँ और सम्मुख भुजाएँ, सम्मुख तथा बाह्य कोणों का बोध

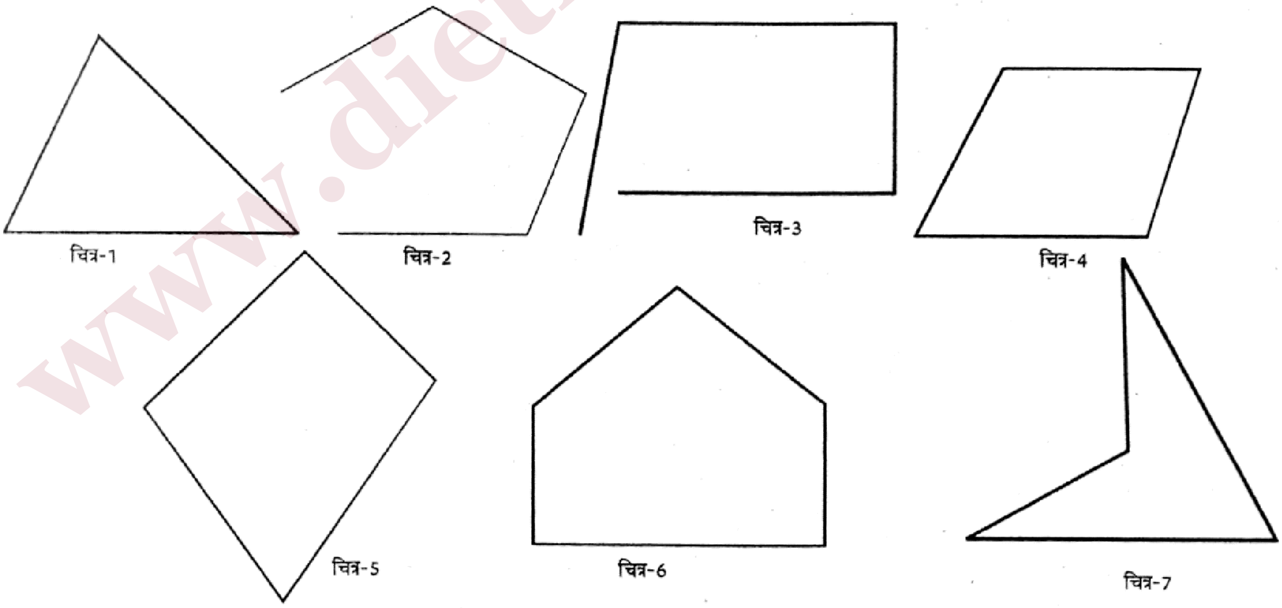
आप दैनिक जीवन में, अपने परिवेश से विभिन्न आकारों की अनेक ऐसी वस्तुएँ देखते हैं, जिनके तल चार भुजाओं से घिरे हैं, जैसे-पुस्तकें, दरवाजे, कमरे की छत, दीवारें इत्यादि। इन सभी वस्तुओं के तल चार भुजाओं से घिरे (आयात या वर्ग) होते हैं।

आप पढ़ चुके हैं कि रेखाखंडों द्वारा बनी सरल बन्द आकृति को बहुभुज कहते हैं और तीन रेखाखंडों द्वारा बने बहुभुज को त्रिभुज कहते हैं। इस अध्याय में आप चार भुजाओं से घिरी आकृतियों के प्रकार एवं उनके गुणों का अध्ययन करेंगे।

इन्हें कीजिए :

4, 5, 6 माचिस की तीलियों को ले कर भिन्न-भिन्न कई प्रकार के बहुभुज बनाइये। तीलियों की संख्या के आधार पर इनका नाम भी सोचिए।

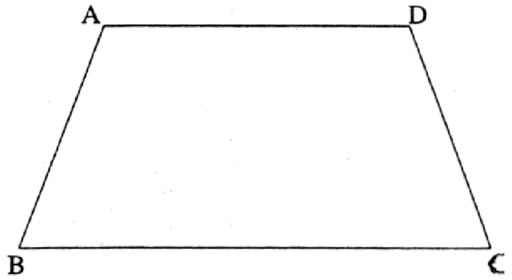
नीचे दिये चित्रों को देखकर आकृति पहचानने का प्रयास कीजिए।



चित्र-1 चित्र-2 चित्र-3 चित्र-4 चित्र-5 चित्र-6 चित्र-7

चित्र-1 त्रिभुज है, चित्र 2, 3 खुली आकृतियाँ हैं। चित्र 4 और चित्र 5, 7 चार रेखाखंडों का बहुभुज अर्थात चतुर्भुज है, चित्र-6 पाँच रेखाखण्डों से बना बहुभुज अर्थात पंचभुज है।

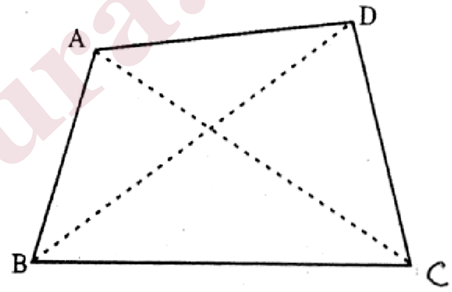
आप जानते हैं तीन रेखाखण्डों से बनी बन्द आकृति को त्रिभुज कहते हैं, इसी प्रकार रेखाखण्डों से बनी आकृति को चतुर्भुज कहते हैं।



सम्मुख आकृति में रेखाखंडों *AB*, *BC*, *CD* और *DA* से बनी आकृति को देखिए। यह चार रेखाखंडों से बनी बन्द आकृति है, इसे हम चतुर्भुज *ABCD* से सम्बोधित कर सकते हैं।

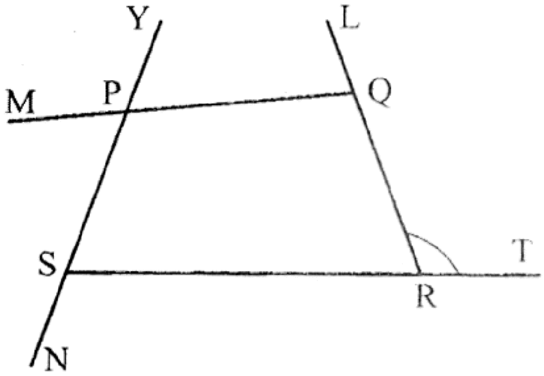
चतुर्भुज के शीर्ष, भुजाएँ, विकर्ण, संलग्न भुजाएँ, सम्मुख भुजाएँ तथा इसके अतः एवं बाह्य कोण :

सम्मुख आकृति को देखिए। इसकी कितनी भुजाएँ हैं? हम देखते हैं कि AB, BC, CD तथा DA चार भुजाएँ हैं।



भुजा AB, AD, भुजा AB, BC, भुजा BC, CD तथा भुजा CD, DA परस्पर लगे हैं, आसन्न हैं या संलग्न हैं। इन्हें संलग्न भुजाएँ कहते हैं। जिस बिन्दु पर संलग्न भुजाएँ एक दूसरे को काटती हैं उसे शीर्ष कहते हैं। इस प्रकार चतुर्भुज ABCD में देखिए कितने शीर्ष हैं? इसके चार शीर्ष A, B, C और D हैं।

हम देखते हैं कि भुजा AB तथा DC परस्पर आमने सामने हैं। इन्हें सम्मुख भुजाएँ कहते हैं। इनके अतिरिक्त और कौन-कौन सी सम्मुख भुजाएँ हैं? AD तथा BC सम्मुख भुजाएँ हैं। ABCD में सम्मुख शीर्ष कौन से हैं? A का सम्मुख शीर्ष C और B का सम्मुख शीर्ष D है। सम्मुख शीर्ष A और C को मिलाने वाले रेखा खंड AC को विकर्ण कहतेहैं। दूसरा विकर्ण कौन सा है? BD दूसरा विकर्ण है।

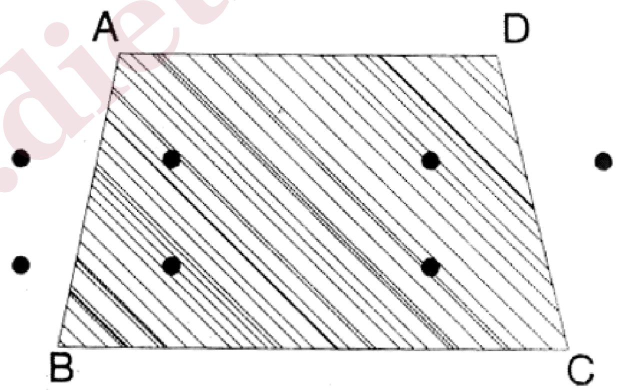


पुनः एक चतुर्भुज PQRS लीजिए। इसके शीर्ष P पर दो संलग्न भुजाएँ SP और QP मिलती हैं। इस प्रकार बने कोण QPS को अन्तः कोण कहते हैं। इस चतुर्भुज के शेष अन्तः कोणों के नाम बताइए। $\angle PSR$, $\angle SRQ$ तथा $\angle RQP$ तीन और अन्तः कोण हैं। भुजा SR को T तक बढ़ाइए। इस प्रकार बने कोण QRT को चतुर्भुज का बाह्य कोण कहते हैं। इसी प्रकार भुजा RQ को L तक, भुजा QP को M तक और भुजा PS को N तक बढ़ाकर बताइए कि चतुर्भुज के अन्य वाह्य कोण कौन से हैं? $\angle LQP$, $\angle NSR$, $\angle MPS$ बाह्य कोण हैं। क्या कोण YPM बाह्य कोण है? नहीं।

प्रयास कीजिए

चतुर्भुज ABCD, तथा PQRS तथा LMNO को खींच कर निम्नलिखित सारिणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

चतुर्भुज / अंगों के नाम	ABCD	PQRS	LMNO
शीर्ष			
भुजाएँ			
संलग्न भुजाएँ			LM, MN; NO, OL; MN, NO; OL, LM
सम्मुख भुजाएँ	AB और DC AD और BC		
विकर्ण			
अन्तःकोण		$\angle P$, $\angle Q$, $\angle R$ और $\angle S$	
सम्मुख कोण	$\angle A$ और $\angle C$		



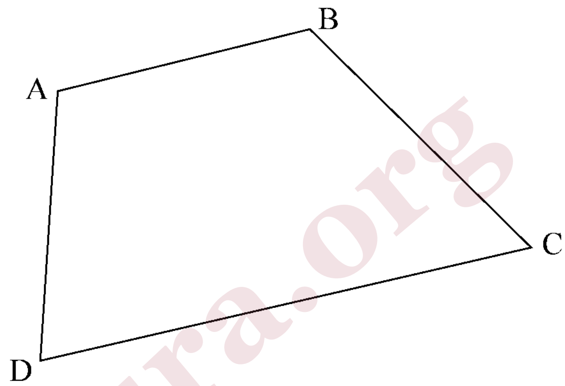
उपर्युक्त चित्र में $\angle D$ और $\angle C$ को देखिए। इन दोनों कोणों में एक भुजा DC उभयनिष्ठ है। चतुर्भुज के अन्य कोणों को बताइए जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो। $\angle A$ और $\angle D$ में भुजा AD, $\angle A$ तथा $\angle B$ में भुजा AB तथा $\angle B$ और $\angle C$ में भुजा BC उभयनिष्ठ है। ऐसे कोण युग्म को जिनमें एक भुजा उभयनिष्ठ हो संलग्न या आसन्न कोण कहते हैं।

ऐसे कोणों को बताइए जो संलग्न या आसन्न कोण न हों? कोण B और कोण D तथा कोण A और कोण C एक दूसरे के आमने-सामने हैं। ऐसे कोणों को सम्मुख कोण कहते हैं।

चतुर्भुज ABCD के अन्तः रेखांकित भाग को अन्तः भाग (Interior) तथा उसके बाहर के भाग को बहिर्भाग (Exterior) कहते हैं।

एक चतुर्भुज की भुजाओं व कोणों की प्रकृति के आधार पर उसे विशेष नाम दिया जाता है।

मूल्यांकन



1. सम्मुख चतुर्भुज ABCD में—
   - (a) कितनी भुजाएँ हैं?
   - (b) कितने अन्तःकोण हैं?
   - (c) सम्मुख कोणों के कितने युग्म हैं?
   - (d) संलग्न भुजाओं के कितने जोड़े हैं?
   - (e) कितने विकर्ण होंगे?
   - (f) क्या AB, BC, CD और DB में कोई विकर्ण हैं?

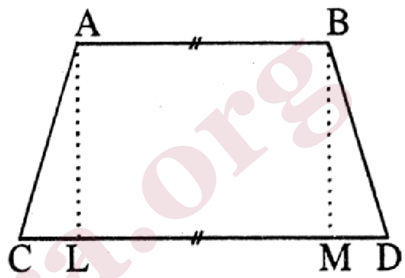
2. किसी चतुर्भुज ABCD से सम्बन्धित निम्नलिखित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।
   - (a) दो .... शीर्षों को मिलाने से विकर्ण बनता है।
   - (b) शीर्ष A और .... को मिलाने से विकर्ण बनता है।
   - (c) शीर्ष D और .... को मिलाने से विकर्ण बनता है।
   - (d) चतुर्भुज का एक विकर्ण इसे .... त्रिभुजों में विभाजित करता है।

———

इकाई-19

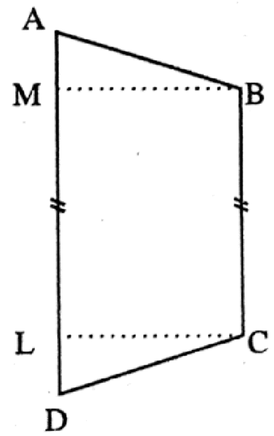
चतुर्भुज के प्रकार–समलम्ब, समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत, वर्ग। इनके प्रगुणों का प्रायोगिक सत्यापन

1. समलम्ब



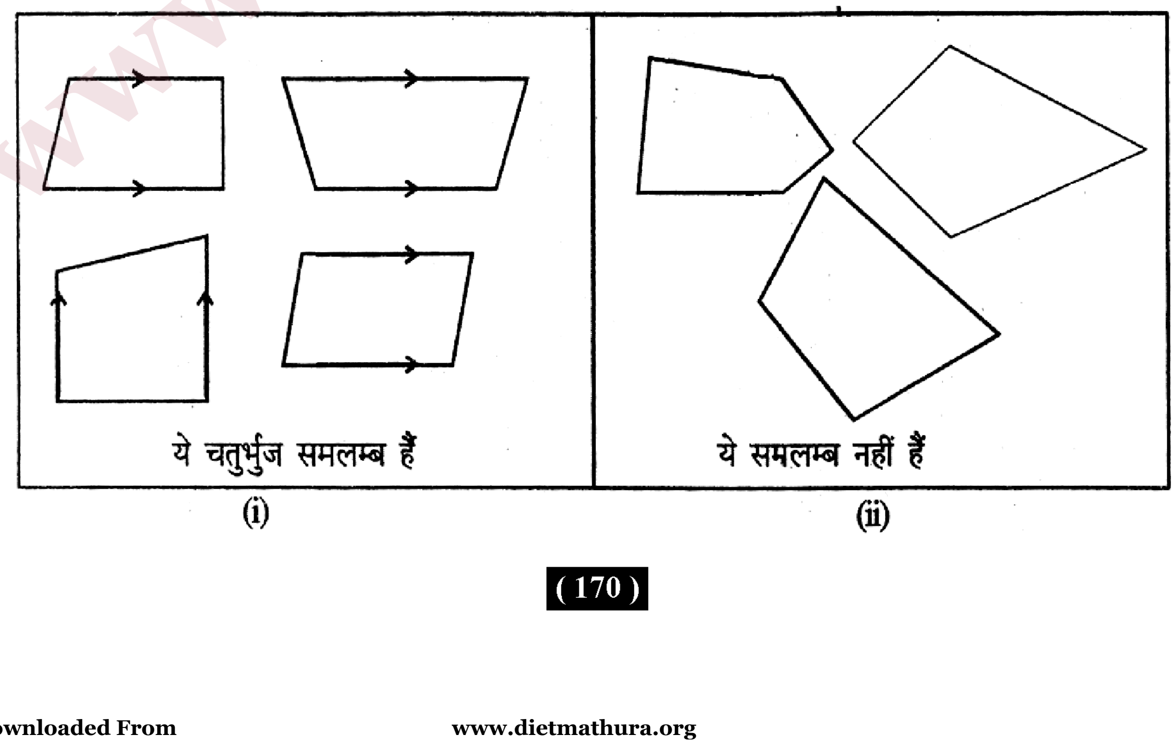
ABCD को देखिए। इसकी सम्मुख भुजाएँ AB तथा CD परस्पर समांतर हैं। बिन्दु A और B से भुजा DC पर लम्ब डालिए और इनकी लम्बाइयाँ नाप कर बताइए।

हम देखते हैं कि दोनों लम्बाइयाँ बराबर हैं अर्थात् AL = BM।



ऐसे चतुर्भुज को जिसकी सम्मुख भुजाओं का एक युग्म समांतर हो, समलम्ब कहते हैं।

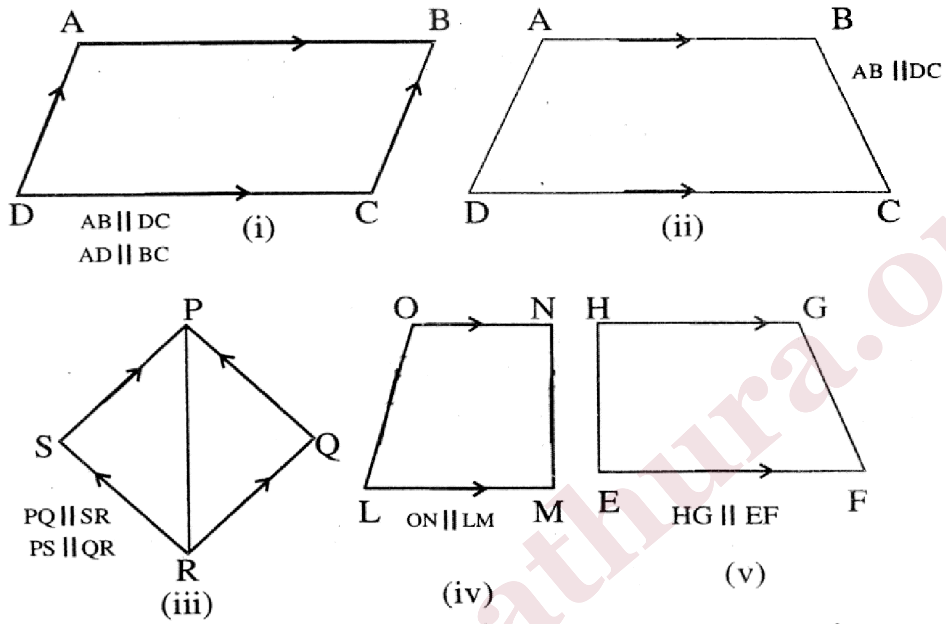
सम्मुख चित्र को देखिए। यह कैसा चतुर्भुज है? यह भी समलम्ब है।



(i) (ii)

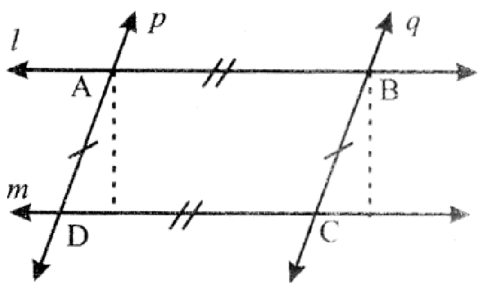
2. समांतर चतुर्भुज

समांतर चतुर्भुज भी एक चतुर्भुज ही है। जैसा कि इसके नाम से संकेत होता है कि इसका सम्बन्ध समांतर रेखाओं से है। समान्तर चतुर्भुज में सम्मुख भुजाओं के दोनों युग्म समान्तर होते हैं।



चित्र—(i), व (iii) समान्तर चतुर्भुज हैं। चित्र (ii), (iv) व (v) समान्तर चतुर्भुज नहीं है परन्तु समलम्ब हैं।

दो समांतर रेखाएँ l और m खींचिए। इसी प्रकार दो और समांतर रेखाएँ p और q खींचिए जो पूर्व समांतर रेखाओं को A, D तथा C, B पर काटतीहै। प्रतिच्छेद बिन्दु A और B से रेखा m पर लम्ब डालिए और इनकी दूरी मापिए। ये दोनों दूरियाँ भी समान हैं अर्थात् AB।। DC इसी प्रकार AD।। BC। ऐसे चतुर्भुज को जिसकी सम्मुख भुजाएँ समान्तर हों, **समांतर चतुर्भुज** कहते हैं।



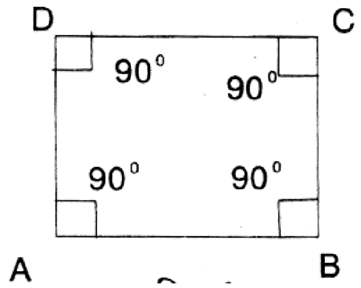
प्रयास कीजिए—

> एक 30^0–60^0–90^0 कोणों वाले दो समान सेट स्क्वेयर लीजिए, अब इन्हें आपस में इस प्रकार मिला कर रखिए कि जिससे एक समांतर चतुर्भुज बन जाए, विचार कीजिए कि यह समांतर चतुर्भुज के गुण की पुष्टि करता है।

3. आयत

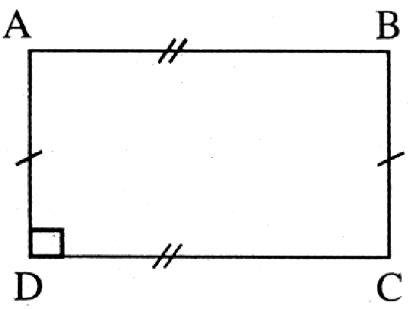
आयत एक समांतर चतुर्भुज है जिसके सभी कोण समान होते हैं।

एक आयत की आकृति बनाइए और प्रत्येक कोण को चाँदा की सहायता से मापिए। आप देखेंगे कि प्रत्येक कोण की माप 90^0 है।



प्रयास कीजिए :

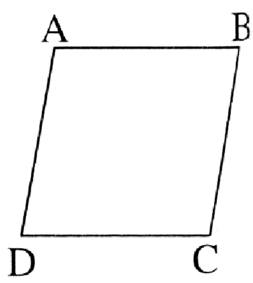
सम्मुख चित्र में AB || DC और AD || BC, $\angle ADC = 90^0$, शेष कोणों को नाप कर इनका मान बताइए। $\angle A = \angle B = \angle C = 90^0$, भुजा AB और DC तथा भुजा AD और BC को नापकर देखिए। भुजा AB = CD और भुजा AD = BC।



ऐसे चतुर्भुज ABCD को जिसका प्रत्येक कोण 90^0 और सम्मुख भुजाएँ बराबर हों, **आयत** कहते हैं।

आयत एक ऐसा समान्तर चतुर्भुज है जिसका प्रत्येक कोण समकोण होता है।

4. समचतुर्भुज :



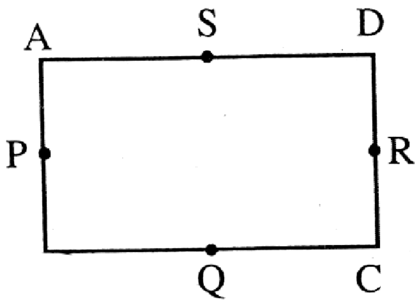
सम्मुख चित्र में AB || DC और AD || BC है। संलग्न भुजाओं को मापिए। संलग्न भुजाएँ AB = AD; AD = DC; DC = CB तथा CB = BA।

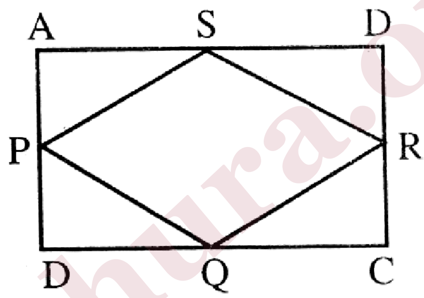
ऐसे चतुर्भुज को **समचतुर्भुज** कहते हैं।

सम चतुर्भुज एक ऐसा चतुर्भुज है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर लम्बाई की होती हैं। चूँकि सम चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समांतर होती हैं, इसलिए यह एक समांतर चतुर्भुज भी है। अतः एक सम चतुर्भुज में एक समांतर चतुर्भुज के सभी गुण विद्यमान हैं।

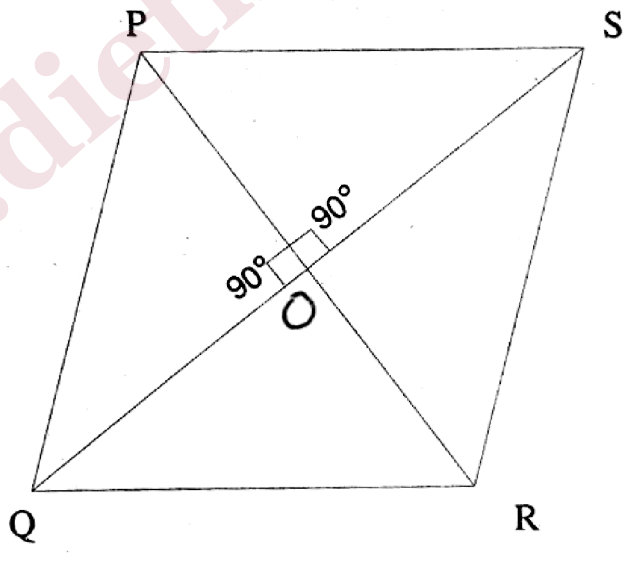
इसे कीजिए

एक आयताकार कागज लीजिए। निम्नांकित चित्र (i) में ABCD एक आयताकार कागज है, इसकी भुजा AB को इस प्रकार मोड़िए कि बिन्दु A बिन्दु B पर पड़े और कागज को दबा दीजिए तो क्रीज बन जायेगी। AB पर क्रीज का बिन्दु P भुजा AB का मध्य बिन्दु है। इसी प्रकार BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु Q, R तथा S ज्ञात कीजिए। अब कागज को रेखाखंड PQ के अनुगत मोड़ दीजिए। इसी प्रकार कागज को QR, RS तथा SP के अनुगत मोड़ दीजिए। एक चतुर्भुज PQRS प्राप्त होगा। चतुर्भुज PQRS एक सम चतुर्भुज है।





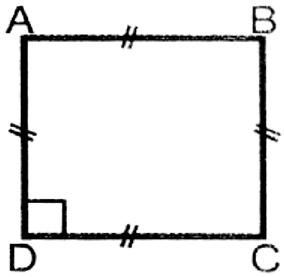
सम चतुर्भुज PQRS के सम्मुख शीर्ष P, R तथा S, Q को जोड़ने पर विकर्ण PR तथा SQ प्राप्त होते हैं जो कि बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। बिन्दु O पर बने कोणों का नापिए। जाँच कीजिए $\angle POQ = \angle POS = 90$



5. वर्ग

सम्मुख आकृति चतुर्भुज ABCD में AB || BC और AD || BC तथा प्रत्येक कोण समकोण है। चारों भुजाओं को नापिए और इनका मान बताइए। भुजा AB = BC = CD = AD

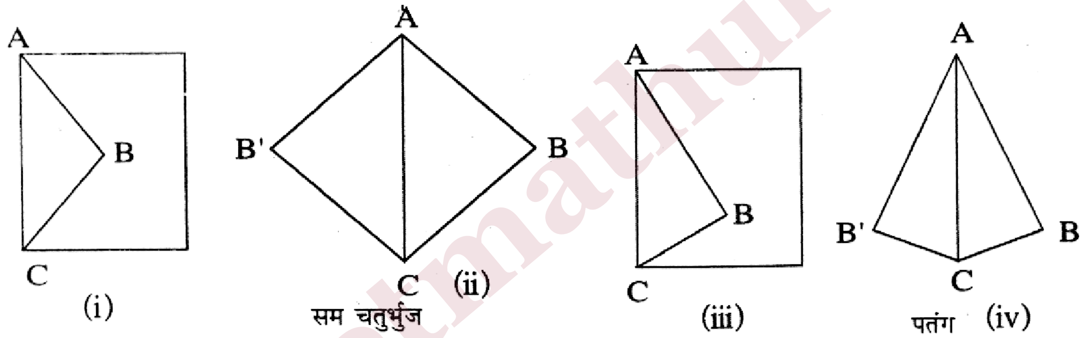
ऐसे चतुर्भुज को जिसका प्रत्येक कोण समकोण और सभी भुजाएँ बराबर हों वर्ग कहते हैं।



वर्ग एक आयत होता है जिसकी भुजाएँ बराबर होती हैं। अर्थात् एक वर्ग में आयत के सभी गुण होने के साथ एक अतिरिक्त गुण भी होता है, वर्ग की चारों भुजाएँ बराबर लम्बाई की होती हैं। वर्ग एक समचतुर्भुज भी है।

6. पतंग

एक मोटे कागज की सीट लीजिए। इसे दोहरा कर मोड़ लीजिए। चित्रानुसार समान लम्बाई के दो रेखाखंड $AB = BC$ खींचिए। अब ABC के अनुदिश काटकर खोलिए प्राप्त आकृति एक समचतुर्भुज है। यदि आप $AB > BC$ लम्बाई के रेखाखण्ड खींचते तो प्राप्त आकृति एक पतंग होती पतंग एक चतुर्भुज है जिसमें दो आसन्न भुजाओं के युग्म बराबर होते हैं।

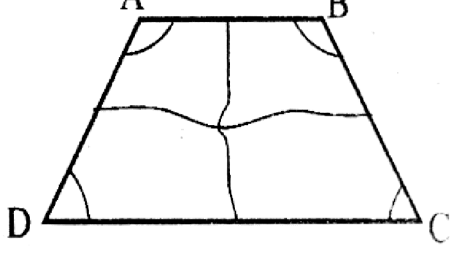


प्रयास कीजिए :

1. एक समचतुर्भुज $ABCD$ लीजिए। समचतुर्भुज के शीर्षों A, B, C तथा D से क्रमशः सम्मुख भुजाओं क्रमशः BC, CD, DA तथा AB पर लम्ब खींचिए। सभी लम्बों को मापकर उनकी मापें लिखिए। क्या A और C से खींचे गये लम्बें की मापें समान है? क्या B और D से सम्मुख भुजाओं पर खींचे गये लम्बें की मापें समान है? उत्तर के कारण भी लिखिए।
2. समचतुर्भुज और वर्ग में क्या अन्तर है? चित्र बनाकर समझाइए।

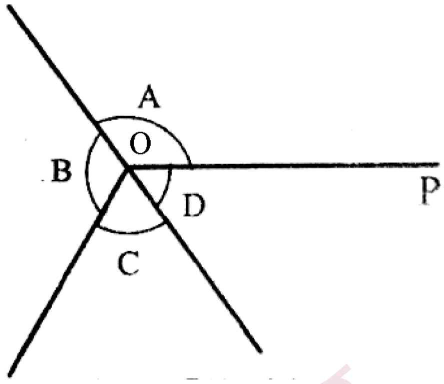
चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योगफल

क्रियाकलाप—



1. एक मोटे कागज पर एक चतुर्भुज $ABCD$ बनाइए। इसके चार टुकड़े इस प्रकार कीजिए कि प्रत्येक टुकड़े में अलग-अलग कोण A, B, C तथा D आ जाएँ। अब एक किरण OP खींचिए। बिन्दु O पर चारों

कोणों को क्रम से व्यवस्थित कीजिए। अब हम देखते हैं कि चतुर्भुज के चारों अन्तः कोण $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ को बिन्दु O पर क्रम से रखने पर $\angle D$ की कोर OP पर पुनः आ जाती है। किसी बिन्दु पर कितने अंश का कोण बनता है? हम जानते हैं कि किसी बिन्दु पर एक सम्पूर्ण कोण (360°) बनता है। अतः चतुर्भुज के चारों अन्तः कोणों अर्थात् $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ और $\angle D$ का योगफल 360° है।



2. अब आप अपनी अभ्यास पुस्तिका पर अलग-अलग प्रकार के तीन चतुर्भुज खींचिए और प्रत्येक का नामांकन ABCD कीजिए। प्रत्येक चतुर्भुज के कोणों को नापिए और निम्नांकित तालिका में इनके मापों को अंकित कीजिए।

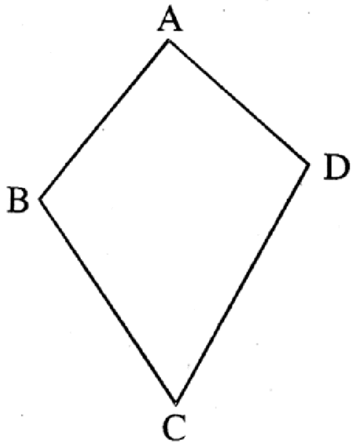
चतुर्भुज की क्रम संख्या	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$S = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D$	$360° - S$
1						
2						
3						

अब हम देखते हैं कि $360° - S$ का मान शून्य होगा अथवा इतना छोटा है कि इसे छोड़ा जा सकता है। अर्थात् $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

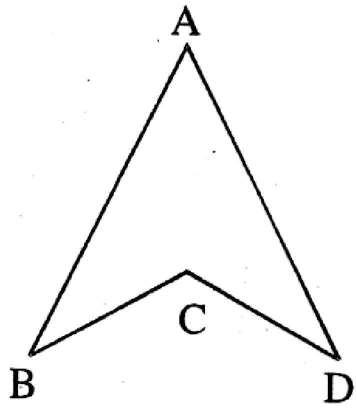
चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योग 360° होता है।

उपर्युक्त क्रिया कलाप द्वारा निष्कर्ष निकला है कि चतुर्भुज के अन्तः कोणों का योग 360° होता है। और प्रत्येक अन्तःकोण 180° से छोटा होता है। ऐसे चतुर्भुज को उत्तल चतुर्भुज कहते हैं। यदि किसी चतुर्भुज का कोई अन्तः कोण 180° से बड़ा होता है उसे अवतल चतुर्भुज कहते हैं।

ध्यान दें—ज्यामिति में हम केवल उत्तल चतुर्भुज का अध्ययन करते हैं।

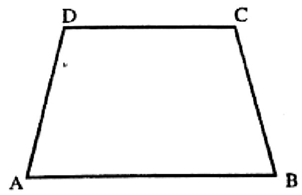
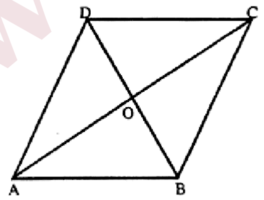
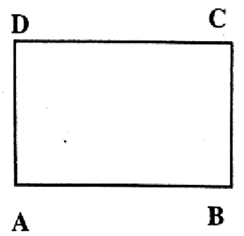


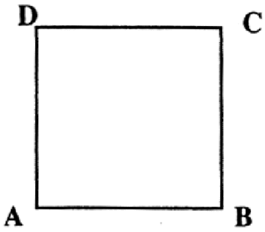
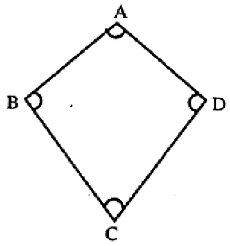
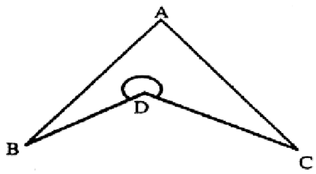
उत्तल चतुर्भुज



अवतल चतुर्भुज

निम्नांकित सारिणी में दिये गये चतुर्भुज की विशेषताएँ रिक्त स्थानों में भरिए।

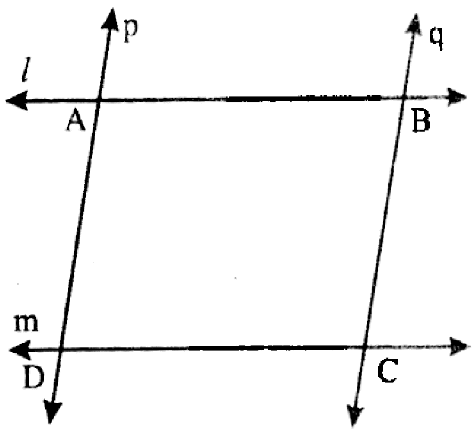
क्र.सं.	चतुर्भुज ABCD के अंग	नाम और विशेषताएँ
1.		**समलम्ब (Trapezium)**—वह चतुर्भुज जिसके सम्मुख भुजाओं का एक युग्म .... होता है।
2.		**समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)**—वह चतुर्भुज जिसकी सम्मुख भुजाएँ समान्तर होती हैं। समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ .... होती हैं। समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण .... होते हैं।
3.		**समचतुर्भुज (Rhombus)**—वह समान्तर चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ .... होती हैं। समचतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को .... पर प्रतिच्छेदित करते हैं।
4.		**आयत (Rectangle)**—वह चतुर्भुज है जिसकी सम्मुख भुजाएँ .... होती है और प्रत्येक कोण .... होता है। आयत के दोनों विकर्ण .... होते हैं।

5.		**वर्ग (Square)**—वह चतुर्भुज जिस की चारों भुजाएँ .... होती हैं, वर्ग का प्रत्येक कोण .... होता है। वर्ग के दोनों विकर्ण .... होते हैं। वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।
6.		**उत्तल चतुर्भुज (Convex)**—वह चतुर्भुज जिसके प्रत्येक कोण 180° से छोटे होते हैं। क्रमांक 1, 2, 3, 4, 5, और 6 में दिये गये चतुर्भुजों में, प्रत्येक चतुर्भुज का प्रत्येक कोण .... से छोटा है।
7.		**अवतल चतुर्भुज (Concave)**—वह चतुर्भुज जिसका एक कोण 180° से बड़ा होता है। क्रमांक 7 में दिया गया चतुर्भुज अवतल चतुर्भुज है। इसका एक कोण D, ... से बड़ा है।

समांतर चतुर्भुज के सम्मुख भुजाएँ–

क्रियाकलाप—

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इन रेखाओं को प्रतिच्छेद करते हुए समांतर रेखाओं का जोड़ा p और q खींचिए। इन प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ABCD से नामांकित कीजिए। इसी प्रकार के दो समांतर चतुर्भुज अपनी अभ्यास पुस्तिका पर खींजिए। तीनों चतुर्भुजों का नाम ABCD लिखिए। अब भुजा AB, BC, CD तथा DA को मापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।



क्रम संख्या	सम्मुख भुजाओं AB और DC का जोड़ा		सम्मुख भुजाओं BC और AD का जोड़ा		
AB	DC	AB – DC	BC	AD	BC – AD
1					
2					
3					

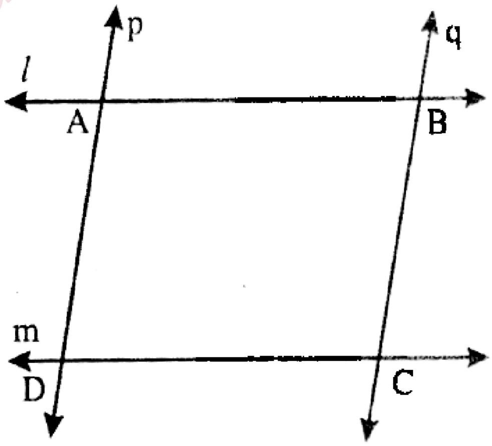
तालिका से हम देखते हैं कि AB – DC तथा BC – AD शून्य है अथवा इसका अन्तर इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् प्रत्येक स्थिति में AB = DC तथा BC = AD अतः हम देखते हैं कि

समान्तर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।

समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोणः

क्रियाकलाप :

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इन रेखाओं का प्रतिच्छेद करते हुए समांतर रेखाओं का जोड़ा p और q खींचिए। इस प्रकार बने चतुर्भुज को ABCD से नामांकित कीजिए।



विभिन्न नाप के दो ABCD समांतर चतुर्भुज बनाइए। अब तीनों चतुर्भुजों के अन्तः कोणों को मापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

क्रम संख्या	सम्मुख कोणों A और C का जोड़ा			सम्मुख कोणों B और D का जोड़ा		
	$\angle A$	$\angle C$	$\angle A - \angle C$	$\angle B$	$\angle D$	$\angle B - \angle D$
1.						
2.						
3.						

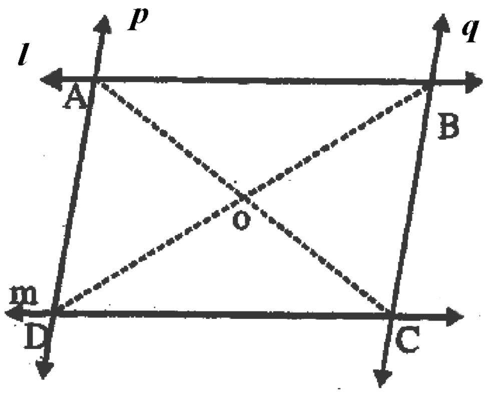
तालिका से हम देखते हैं कि $\angle A - \angle C$ तथा $\angle B - \angle D$ शून्य है अथवा इनका अन्तर इतना छोटा है कि इनके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् $\angle A = \angle C$ तथा $\angle B = \angle D$

अतः हम देखते हैं कि

समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं।

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इन रेखाओं का प्रतिच्छेदन करते हुए समांतर रेखाओं का एक और जोड़ा p और q खींचिए। इस प्रकार बने समांतर चतुर्भुज को ABCD से नामांकित कीजिए। शीर्ष A, C तथा B, D को मिलाइए। विकर्ण AC और BD एक दूसरे का बिन्दु O पर प्रतिच्छेदन करते हैं। इसी प्रकार दो और समांतर चतुर्भुज बनाइए। इनके नाम भी ABCD रखिए। इनके विकर्ण AC और BD का भी प्रतिच्छेदन बिन्दु O मानिए।



अब AO और OC तथा DO और OB को माप कर निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

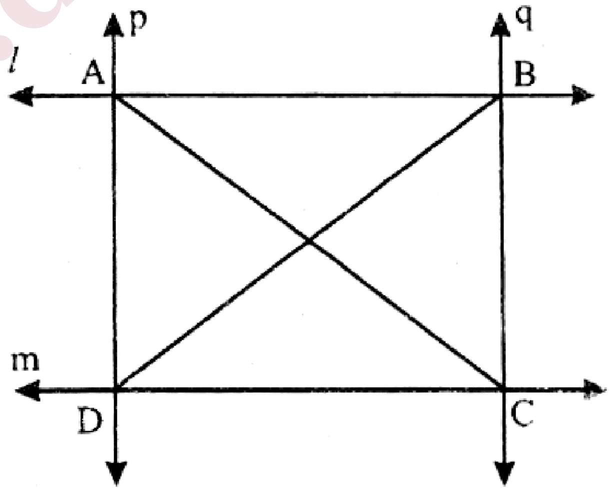
क्रम संख्या	विकर्ण AC			दूसरा विकर्ण BD		
	AO	OC	AO – OC	DO	OB	DO – OB
1.						
2.						
3.						

हम देखते हैं कि AO – OC तथा DO – OB शून्य है अथवा इनका अन्तर इतना छोटा है कि इसे छोड़ा जा सकता है अर्थात् AO = OC तथा DO = OB। अतः

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

आयत के विकर्ण :

समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। इसी प्रकार समान्तर रेखाओं p और q का जोड़ा खींचिए, जो पूर्व रेखाओं पर लम्ब है। इस प्रकार बने आयत को $ABCD$ से नामांकित कीजिए। ऐसे ही दो और आयतों की रचना कीजिए, इनको भी $ABCD$ से नामांकित कीजिए। अब विकर्ण AC और BD को मापिए और इनके मान को निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

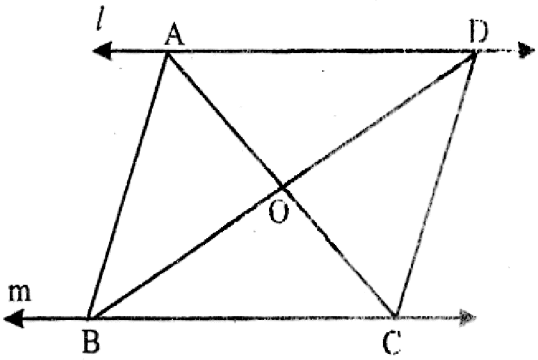


क्रम संख्या	विकर्ण की लम्बाइयाँ		
	AC	BD	AC – BD
1.			
2.			
3.			

हम देखते हैं कि विकर्णों की लम्बाइयों के माप का अन्तर AC – BD शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् AC = BC अतः

आयत के विकर्ण समान होते हैं। ध्यान दें कि आयत एक विशेष प्रकार का समान्तर चतुर्भुज है इसलिए इसके विकर्ण भी एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

समचतुर्भुज के विकर्ण



समांतर रेखाओं का एक जोड़ा l और m खींचिए। किसी रेखा पर एक बिन्दु A लीजिए। A को केन्द्र मानकर ऐसी दूरी की त्रिज्या लेकर चाप लगाइए कि यह दोनों रेखाओं को काटे। मान लीजिए कि कटान बिन्दु क्रमशः D और B हैं। बिन्दु A को बिन्दु B से मिलाइए और बिन्दु D से AB के समान्तर DC रेखा खींचिए। आकृति ABCD एक समचतुर्भुज है जिसकी चारों भुजाएँ समान हैं। AC और BD विकर्ण हैं। मान लीजिए कि ये बिन्दु O पर प्रतिच्छेद करते हैं। इसी प्रकार दो और समचतुर्भुजों की रचना कीजिए। इन्हें ABCD से नामांकित कीजिए।

अब समचतुर्भुज में कोण $\angle$ AOB और $\angle$ COB को नापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

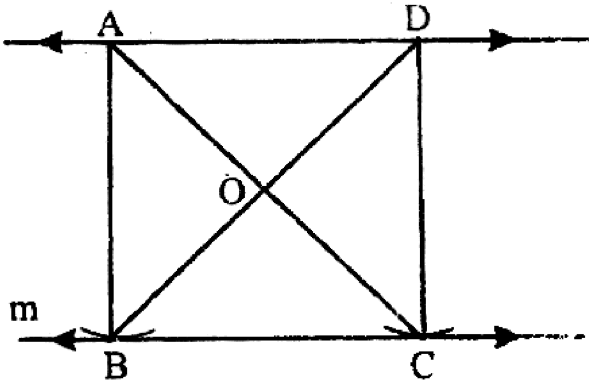
समचतुर्भुज की क्रम संख्या	$\angle$ AOB	$90° - \angle$ AOB	$\angle$ COB	$90° - \angle$ COB
1.				
2.				
3.				

हम देखते हैं कि $90° - \angle$ AOB और $90° - \angle$ COB का मान शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् $90° = \angle$ AOB तथा $90° = \angle$ COB या $\angle$ AOB $= \angle$ COB $= 90°$

समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

वर्ग के विकर्ण

एक वर्ग ABCD की रचना कीजिए। इनके विकर्ण AC व BD एक दूसरे को O पर प्रतिच्छेद करते हैं। ऐसे ही दो और वर्गों की रचना कीजिए। इनको भी ABCD से नामांकित कीजिए। विकर्ण AC और BD को मापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।



वर्ग की क्रम संख्या	**AC**	**BD**	**AC – BD**
1.			
2.			
3.			

हम देखते हैं कि AC – BD शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसका मान छोड़ा जा सकता है अर्थात् AC = BD

अतः

वर्ग के विकर्ण समान होते हैं।

पुनः उपर्युक्त तीनों वर्गों में $\angle$ AOB और $\angle$ COB को नापिए और निम्नांकित तालिका में अंकित कीजिए।

समचतुर्भुज की क्रम संख्या	$\angle$ AOB	90° – $\angle$ AOB	$\angle$ COB	90° – $\angle$ COB
1.				
2.				
3.				

हम देखते हैं कि 90° – $\angle$ AOB और 90° – $\angle$ COB का मान शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसके मान को छोड़ा जा सकता है अर्थात् 90° = $\angle$ AOB और 90 ° = $\angle$ COB या $\angle$ AOB = $\angle$ COB = 90°

अतः

वर्ग के विकर्ण समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

हमने क्या चर्चा की

1. चतुर्भुज के शीर्ष, भुजाएँ, विकर्ण, संलग्न भुजाएँ, सम्मुख भुजाएँ तथा इसके अन्तः एवं वाह्य कोण।
2. चतुर्भुज के विशिष्ट प्रकार-समान्तर चतुर्भुज, समचतुर्भुज, आयत तथा वर्ग।
3. चतुर्भुज के निम्नांकित प्रगुणों का प्रायोगिक सत्यापनः
   (i) चतुर्भुज के सभी अन्तः कोणों का योगफल 360° होता है।
   (ii) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख भुजाएँ समान होती हैं।
   (iii) समांतर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं।
   (iv) समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(v) आयत के विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर एक दूसरे को समद्विभाजित करते हैं।

(vi) समचतुर्भुज के विकर्ण परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

(vii) वर्ग के विकर्ण समान होते हैं तथा परस्पर समकोण पर समद्विभाजित करते हैं।

मूल्यांकन

1. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

   (a) सम चतुर्भुज की चारों भुजाएँ .... होती हैं।

   (b) आयत की आमने-सामने की भुजाएँ .... होती हैं।

   (c) आयत का प्रत्येक कोण .... होता है।

   (d) वर्ग की .... भुजाएँ बराबर और .... कोण समकोण होते हैं।

   (e) समलम्ब चतुर्भुज की .... भुजाओं का एक युग्म समान्तर होता है।

2. किसी चतुर्भुज का एक कोण 75° तथा शेष तीन अन्तः कोण बराबर हैं। शेष प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।

3. यदि किसी चतुर्भुज के दो अन्तः कोण कोटिपूरक हैं, तो शेष दो कोणों का योग ज्ञात कीजिए।

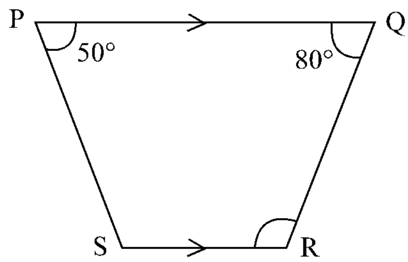
4. यदि चतुर्भुज के अन्तः कोणों का अनुपात 3 : 5 : 7 : 9 हो, तो प्रत्येक कोण का मान ज्ञात कीजिए।

5. समांतर चतुर्भुज का एक अन्तः 50° है। शेष कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि समांतर चतुर्भुज की संलग्न भुजाएँ 10 सेमी तथा 5 सेमी हैं। चतुर्भुज का परिमाप बताइए।

7. समान्तर चतुर्भुज की दो संलग्न भुजाओं का अनुपात 1:2 है। यदि इसका परिमाप 66 सेमी हो, तो प्रत्येक भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

8. समलम्ब चतुर्भुज में कोण S तथा R का मान बताइए।



9. समांतर चतुर्भुज ABCD में निम्नांकित प्रत्येक कथन के सत्य होने पर आकृति को किस नाम से पुकारेंगे?

   (a) AB = BC

   (b) $\angle$ ABC = 90°

   (c) $\angle$ ABC = 90° और AB = BC

10. यदि किसी वर्ग के विकर्ण का वर्ग 162 वर्ग सेमी है, तो इसका परिमाप ज्ञात कीजिए।

11. समचतुर्भुज का एक विकर्ण यदि उसकी एक भुजा के बराबर हो, तो इनके सभी अन्तः कोणों का मान ज्ञात कीजिए।

12. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए, वर्ग में—

(a) भुजाओं की लम्बाइयाँ .... होती हैं।

(b) विकर्ण .... होते हैं।

(c) प्रत्येक कोण .... होता है।

(d) विकर्ण एक दूसरे के .... होता है।

———

इकाई-20

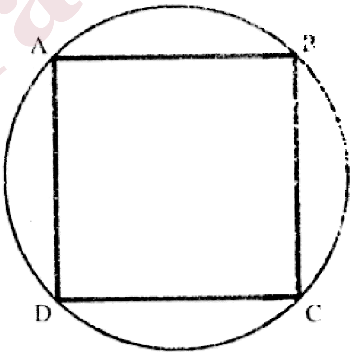
चक्रीय चतुर्भुज, चक्रीय बिन्दु की अवधारणा

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी होगी—

1. चक्रीय चतुर्भुज
2. चक्रीय बिन्दु
3. चक्रीय चतुर्भुज के कोण एवं उनमें सम्बन्ध

चक्रीय चतुर्भुज–

निम्नांकित चित्र में वृत्त के चार बिन्दुओं A, B, C तथा D को मिलाने से एक चतुर्भुज ABCD बना है, इस प्रकार के बने चतुर्भुज ABCD को **चक्रीय चतुर्भुज** कहते हैं।



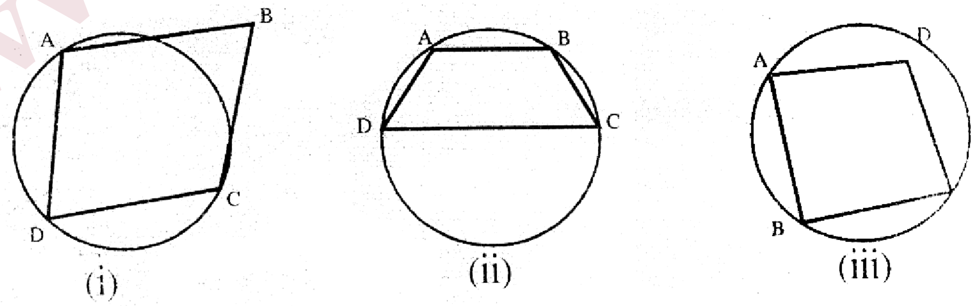
दूसरे शब्दों में यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक ही वृत्त पर हो तो वह **चतुर्भुज चक्रीय** चतुर्भुज कहलाता है।

अतः

यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक ही वृत्त पर हों तो वह चतुर्भुज, **चक्रीय चतुर्भुज** कहलाता है।

प्रयास कीजिए—

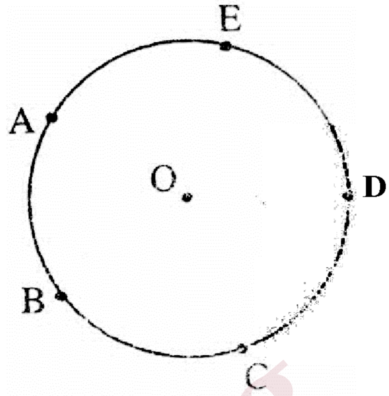
निम्न आकृतियों में चक्रीय चतुर्भुजों की पहचान करें।



चक्रीय बिन्दु

ऐसे बिन्दु जो एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं, उन्हें चक्रीय या एक वृत्तीय बिन्दु कहते हैं।

पार्श्व चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। बिन्दु A, B, C, D तथा E वृत्त पर स्थित हैं। अतः बिन्दु A, B, C, D तथा E चक्रीय बिन्दु है।

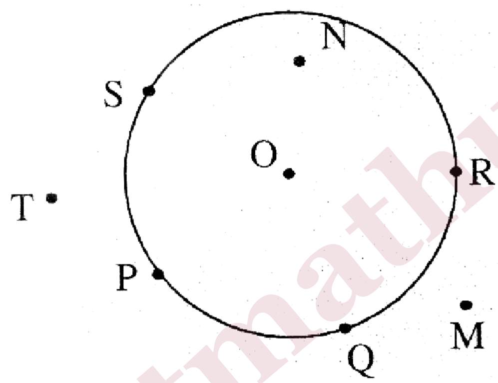


अतः

[illegible] **चक्रीय या एक वृत्तीय बिन्दु** कहते हैं।

प्रयास कीजिए—

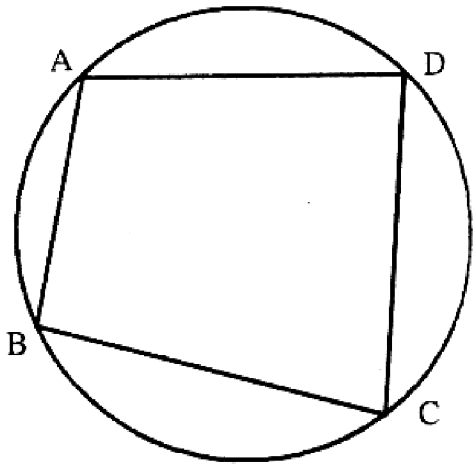
निम्नांकित वृत्त में चक्रीय बिन्दुओं की पहचान करें।



चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण

इन्हें सोचिए और लिखिए

पार्श्व चित्र में चक्रीय चतुर्भुज ABCD में $\angle A$ के सामने के कोण तथा $\angle B$ के सामने के कोण का नाम लिखें।



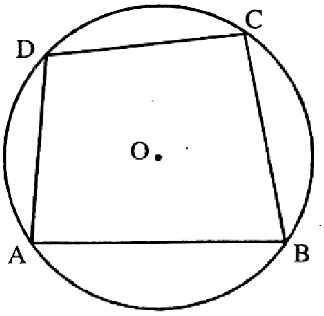
हम देखते हैं कि $\angle A$ के सामने $\angle C$ तथा $\angle B$ के सामने $\angle D$ है।

अतः $\angle A$ एवं $\angle C$, $\angle B$ एवं $\angle D$ सम्मुख कोण हैं।

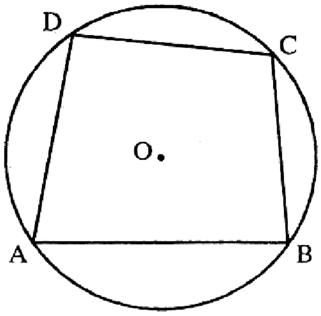
चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

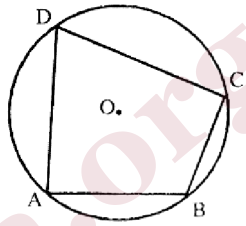
एक वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। इस वृत्त के अन्तर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए। इसके कोणों को नापिए और $\angle A + \angle C$ तथा $\angle B + \angle D$ ज्ञात कीजिए।



(i)



(ii)



(iii)

दो अन्य चक्रीय चतुर्भुजों के कोणों के साथ भी यही प्रक्रिया दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए—

चतुर्भुज का क्रमांक	$\angle A$	$\angle C$	$\angle A + \angle C$	$\angle B$	$\angle D$	$\angle B + \angle D$
(1)						
(2)						
(3)						

हम देखेंगे कि प्रत्येक बार $\angle A + \angle C$ का मान 180° है यदि यह कुछ कम अथवा अधिक है, तो वह नगण्य है।

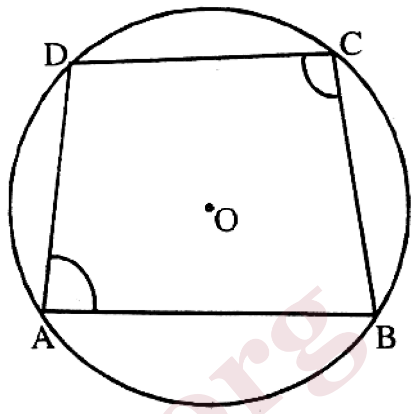
इसी प्रकार हम देखेंगे कि प्रत्येक बार $\angle B + \angle D$ का मान भी 180° है।

अतः

किसी चक्रीय चतुर्भुज में सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180^0 होता है। दूसरे शब्दों में, चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।

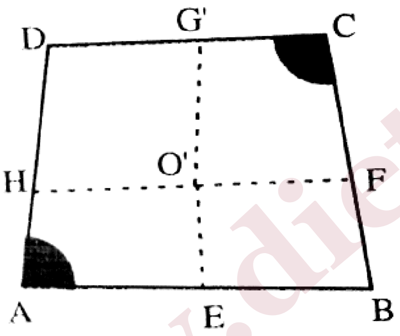
इन्हें भी कीजिए, सोचिए तथा निष्कर्ष निकालिए

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। इसके अन्तर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए। इस प्रकार ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज बन गया। $\angle$ A और $\angle$ C चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का एक युग्म है तथा $\angle$ B और $\angle$ D सम्मुख कोणों का दूसरा युग्म है।

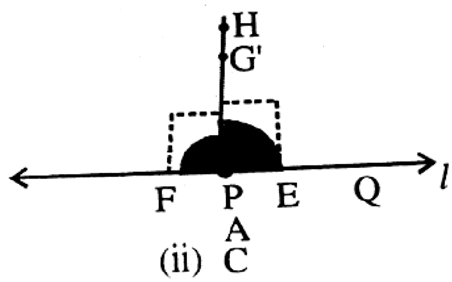


अब एक ट्रेसिंग पेपर लीजिए और चतुर्भुज ABCD को ट्रेस कर लीजिए। चतुर्भुज के अन्तर्गत एक बिन्दु O लीजिए। चित्र में दिखाई गयी बिन्दुदार रेखाओं के अनुसार काट कर चारों कोणों A, B, C और D को अलग कीजिए। (चित्र (i))

अब एक रेखा l खींचिए जैसा कि चित्र (ii) में दिखाया गया है। इस रेखा पर बिन्दु P एवं Q लीजिए। $\angle$ A और $\angle$ C को बिन्दु P पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु A तथा C बिन्दु P पर पड़ें तथा रेखाखंड AE किरण PQ के अनुदिश और रेखाखंड CF किरण PQ के विपरीत ओर पड़े। इस प्रकार हम देखते हैं कि रेखा AH और CG^1 एक दूसरे पर पड़ेंगी। हम देखेंगे कि $\angle$ A और $\angle$ C रैखिक युग्म बनाते हैं। अथवा $\angle A + \angle C = 180°$



(i)



(ii)

यही प्रक्रिया $\angle$ B और $\angle$ D के लिए कीजिए। हम उपर्युक्त की भाँति देखेंगे कि $\angle B + \angle D = 180°$

अतः इस प्रकार हम पाते हैं कि

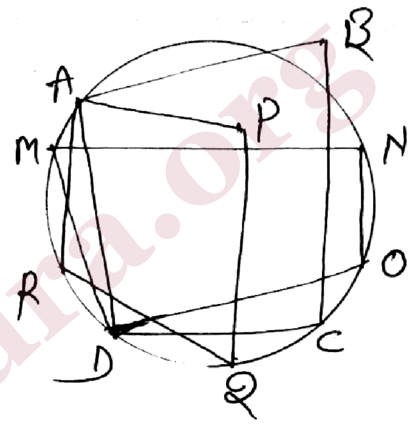
किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं या सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।

हमने क्या चर्चा की :

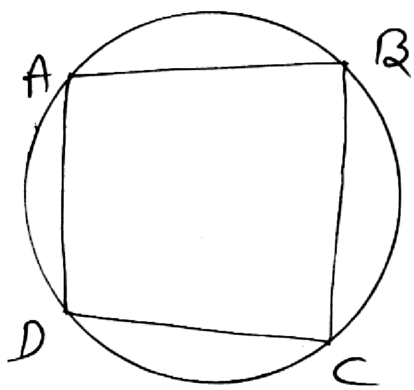
1. वृत्त के किन्ही चार बिन्दुओं को मिलाने से बने चतुर्भुज को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं।
2. ऐसे सभी बिन्दु जो एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं, उन्हें चक्रीय बिन्दु कहते हैं।
3. चक्रीय चतुर्भुज के आमने-सामने के कोण, एक दूसरे के सम्मुख कोण कहलाते हैं।
4. किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180^0 होता है।

मूल्यांकन

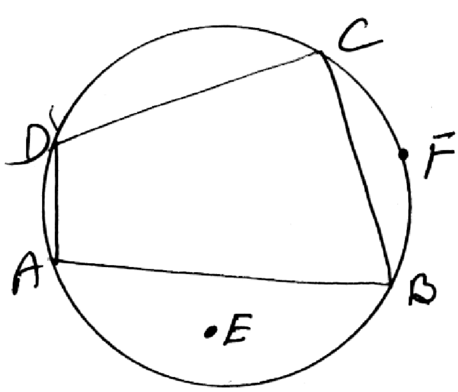
1. सम्मुख चित्र में तीन चतुर्भुजों ABCD, APQR तथा MNOD में कौन सा चक्रीय चतुर्भुज है।



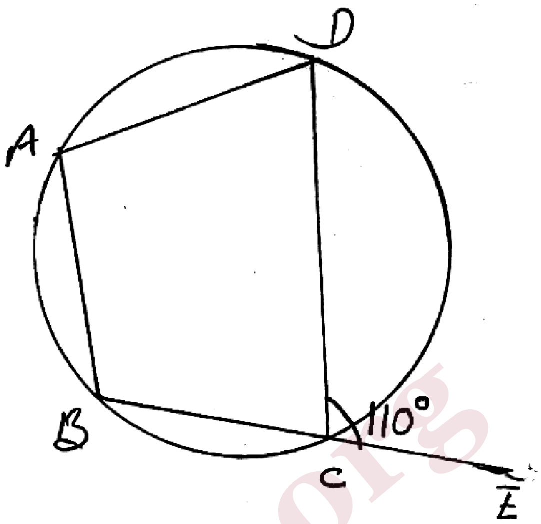
2. पार्श्व चित्र में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है यदि $\angle A = 92°$ तथा $\angle D = 98°$ तो $\angle B$ तथा $\angle C$ का मान ज्ञात कीजिए।



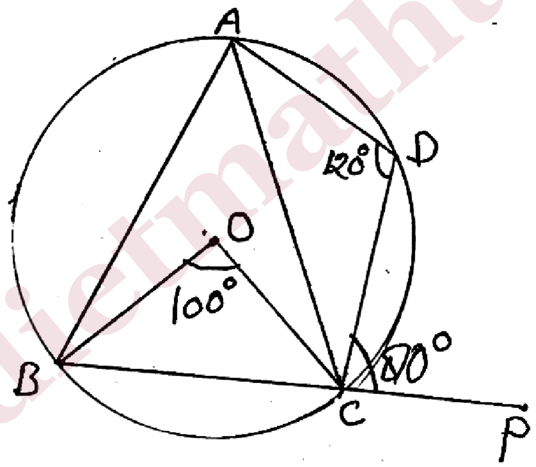
3. पार्श्व चित्र को देखिए और निम्नलिखित कथनों में सत्य / असत्य कथन बताइए।
   (a) बिन्दु A, B, C तथा D चक्रीय बिन्दु हैं।
   (b) बिन्दु A, B, C, D तथा E चक्रीय बिन्दु नहीं हैं।
   (c) बिन्दु A, B, C, D, E तथा F चक्रीय बिन्दु नहीं है।
   (d) $\angle ABC$ का सम्मुख $\angle D$ है।
   (e) चतुर्भुज BCDA एक चक्रीय चतुर्भुज नहीं है।
   (f) चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।
   (g) $\angle B$ का सम्मुख कौन $\angle C$ है।



4. सम्मुख चक्रीय चतुर्भुज ABCD का बहिष्कोण DCE है। यदि $\angle DCE = 110°$ तो कोण A का मान बताओ।



5. निम्नांकित चित्र में ABCD चक्रीय चतुर्भुज है तथा O वृत्त का केन्द्र है। $\angle COB = 100°$, $\angle CDA = 120°$ तथा चक्रीय चतुर्भुज का $\angle DCP = 80°$ तो निम्नांकित का उत्तर दीजिए—



6. $\angle BAC$ का मान होगा—

(i) 80^0 (ii) 100^0

(iii) 40^0 (iv) 50^0

7. $\angle DAB$ का मान होगा—

(i) 80° (ii) 100°

(iii) 50° (iv) 120°

8. $\angle ABC$ का मान होगा—

(i) 60° (ii) 80°

(iii) 100° (iv) 40°

9. $\angle OBC$ का मान होगा—

(i) 60° (ii) 50°

(iii) 40° (iv) 80°

10. $\angle ABO$ का मान होगा—

(i) 40° (ii) 20°

(iii) 60° (iv) 30°

11. $\angle BCD$ का मान होगा—

(i) 80° (ii) 100°

(iii) 50° (iv) 60°

12. $\angle BCA$ का मान होगा—

(i) 60° (ii) 70°

(iii) 80° (iv) 40°

13. $\angle OCA$ का मान होगा—

(i) 20° (ii) 30°

(iii) 35° (iv) 40°

14. $\angle AOB$ का मान होगा—

(i) 100° (ii) 120°

(iii) 140° (iv) 80°

15. $\angle BOA$ का मान होगा—

(i) 100° (ii) 120°

(iii) 140° (iv) 70°

16. $\angle ACD$ का मान होगा—

(i) 20° (ii) 30°

(iii) 40° (iv) 50°

17. $\angle DAC$ का मान होगा—

(i) 30° (ii) 20°

(iii) 60° (iv) 10°

———