बी0टी0सी0 (द्विवर्षीय) पाठ्यक्रमानुसार

(बेसिक टीचर सर्टीफिकेट)

सेवापूर्व शिक्षक प्रशिक्षुओं के लिए पाठ्य पुस्तक

गणित

द्वितीय सेमेस्टर

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् ,
उ0 प्र0 , लखनऊ
राज्य शिक्षा विज्ञान संस्थान, उ0प्र0 , इलाहाबाद

संरक्षक - श्री हीरा लाल गुप्ता-आई.ए.एस., सचिव बेसिक शिक्षा, उ0प्र0 शासन, लखनऊ

परामर्श - सुश्री कुमुदलता श्रीवास्तव-आई.ए.एस., राज्य परियोजना निदेशक, उ0प्र0 सभी के लिए शिक्षा परियोजना परिषद्, लखनऊ

निर्देशक - श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह, निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, उ0प्र0 लखनऊ

समन्वयक - श्रीमती नीना श्रीवास्तव, निदेशक राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0 इलाहाबााद

लेखक - श्रीमती रागिनी श्रीवास्तव, श्रीमती मंजूषा गुप्ता, श्री कैलाश बाबू तथा श्री राकेश कुमार पाण्डेय।

कम्प्यूटर ले आउट- ---------------------------

प्राक्कथन

समय-समय पर साामाजिक बदलाव और उसके अनुरूप आवश्यकताओं को ध्यान में रखते हुए शिक्षा-प्रणाली तथा पाठ्यक्रमों में भी संशोधन एवं युगानुरूप परिवर्तन करने की आवश्यकता शिक्षा-विदों द्वारा अनुभव किया जाना एक स्वाभाविक प्रक्रिया है। इसी के अन्तर्गत राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा शिक्षक-शिक्षा की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2009 के आलोक में उत्तर प्रदेश में प्राथमिक कक्षाओं के शिक्षकों हेतु सेवापूर्व प्रशिक्षण की केन्द्र पुरोनिधानित शिक्षक-शिक्षा योजना लागू की गयी है। इसके अन्तर्गत बी0टी0सी0 के दो वर्षीय पाठ्यचर्या का पुनरीक्षण कर समावेशी विभिन्न विषयों के पाठ्यक्रमों को समुन्नत किया गया है तथा प्रशिक्षु शिक्षकों से यह अपेक्षा की गयी है कि वे बिना किसी भय के शिक्षार्थियों के ज्ञानार्जन में उनकी सहायता कर सकें। नवीन पाठ्यचर्या एवं पाठ्यक्रमों के सन्निहित उद्देश्यों को दृष्टिगत कर राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0, इलाहाबाद द्वारा विज्ञान एवं गणित विषयों की पाठ्यपुस्तकों का सृजन किया गया है।

पाठ्यपुस्तकों की संरचना करते समय इस बात को विशेष महत्व देते हुए भरपूर प्रयास किया गया है कि प्रशिक्षित शिक्षक की ओजभरी वाणी में इतना आकर्षण एवं शक्ति हो कि वह शिक्षाग्रहण करने वाले प्रशिक्षणर्थियों के मन की समस्त दुविधाओं को दूर कर उनकी बुद्धि का पूरा लाभ उन्हें प्रदान कर सकें तथा वह अपने गुरूजनों को अपने माता-पिता के समान अपना सच्चा मार्गदर्शक समझ कर उनके द्वारा प्रदत्त ज्ञान को प्राप्त कर सकें।

विज्ञान और गणित विषय ही समाज को मानव जीवन को जीवन्त बनाने, उसे सब प्रकार के भौतिक सुखों से आप्लावित करने, भविष्य की सुखद योजनाओं की संकल्पना करने, उसका ब्लू-प्रिंट तैयार कर उसे कार्यान्वित करने का सार्थक स्वप्न दिखाते हैं। इन स्वप्नों को साकार करने के बीज जब प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर बच्चों के उर्वर मन में बो दिया जाता है तथा शिक्षक की वाणी की ज्ञान गंगा जब उन्हें निरन्तर सींचती रहती है, तो उसी में से एक दिन रमन, जगदीश चन्द्रबोस जैसे महान वैज्ञानिक तथा रामानुजन, शकुन्तला जैसे महान गणितज्ञ पैदा होते हैं। यह मानकर चलिए कि हमारे विद्या मन्दिर के प्रत्येक बालक-बालिका के उर में एक वैज्ञानिक, एक गणितज्ञ सोया हुआ है, बस आवश्यकता है कि उसे कैसे जगायें, कैसे ऊर्जा स्थित करें और कैसे सृजनात्मकता के पाठ पढ़ाये, और कैसे उसे ज्ञान, बोध, अनुप्रयोग और कौशल के सारे गुर सिखायें कि वह आगे चलकर अपनी अद्‌भुत प्रतिभा से राष्ट्र को समुन्नत करने का बीड़ा उठा सके।

सीमित समयान्तर्गत गणित विषय की पाठ्यपुस्तक को आकर्षक कलेवर प्रदान करने में हमें श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, उत्तर प्रदेश, लखनऊ का समय-समय पर जो अत्यंत उपयोगी मार्ग दर्शन प्राप्त हुआ है, उसके लिए मैं उनके प्रति हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करती हूँ। पाठ्य-पुस्तक के प्रणयन में लेखक मण्डल के सभी सदस्यों के अमूल्य सहयोग के लिए भी मैं उनके प्रति अपना आभार व्यक्त करती हूँ। शिक्षाविद् परामर्शदाताओं के सतत सहयोग से इस पाठ्यपुस्तक को निखारने में हमे जो सहयोग मिला है, उसके लिए भी मैं उनका धन्यवाद करती हूँ। मैं अपने संस्थान के सभी विद्वान सहयोगियों को भी हृदय से धन्यवाद देती हूँ जिनके अहर्निश परिश्रम के बल पर ही यह पाठयपुस्तक अन्तिम स्वरूप को ग्रहण कर सकी है।

सुधार और संशोधन की कोई सीमा नहीं होती है। मैं शिक्षा जगत के सभी सुधीजनों से अपेक्षा करती हूँ कि वे अपने सकारात्मक सुझावों से हमें अवश्य अवगत करायेंगे जिससे पाठ्य पुस्तक के अगले संस्करण को और अधिक ऊर्जावान एवं सार्थक बनाया जा सके।

श्रीमती नीना श्रीवास्तव
निदेशक
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ0प्र0, इलाहाबाद

विषय सूची

		पृष्ठ संख्या
इकाई 1 -	तीन अंकों तक की संख्याओं का ल0स0 एवं म0स0 (अभाज्य गुणनखण्ड एवं भाग विधि)	1-4
इकाई 2 -	व्यंजक में प्रयुक्त जोड़, घटाना, गुणा-भाग के संकेतों तथा कोष्ठकों का सरलीकरण	5-10
इकाई 3 -	प्राकृतिक, पूर्ण, पूर्णांक तथा परिमेय संख्याओं की अवधारणा	11-15
इकाई 4 -	पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं (जोड़, घटाना, गुणा और भाग) के प्रगुण	16-22
इकाई 5 -	पूर्णांक तथा परिमेय संख्याओं पर गणितीय संक्रियाएँ तथा इनके प्रतिलोम तथा तत्समक (योगात्मक तथा गुणात्मक)	23-33
इकाई 6 -	समीकरण तथा सर्वसमिका का अर्थ	34-39
इकाई 7 -	रेखीय समीकरण (एक चर में) का हल एवं इस पर आधारित प्रश्न	40-45
इकाई 8 -	व्यंजकों का गुणनफल तथा सर्वसमिकाएँ	46-54
इकाई 9 -	क्षेत्रफल, आयतन और धारिता की संकल्पना तथा इकाई	55-56
इकाई 10 -	त्रिभुज, आयत एवं वर्ग का क्षेत्रफल	57-58
इकाई 11 -	अवर्गीकृत आंकड़ों की बारम्बारता बंटन तथा आंकड़ों का आयत चित्र द्वारा प्रदर्शन एवं निष्कर्ष निकालना	59-64
इकाई 12 -	सर्वांगसमता तथा समरूपता	65-68
इकाई 13 -	त्रिभुज के सन्दर्भ में सर्वांगसमता की शर्तें	69-70

इकाई-1

तीन अंकों तक की संख्याओं का ल0स0 एवं म0स0

(अभाज्य गुणनखण्ड एवं भाग विधि)

इस इकाई के अध्ययन से निम्नांकित का ज्ञान होगा-

- गुणनखण्ड विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का ल0स0
- भाग विधि से तीन अंकों की संख्याओं का ल0स0
- गुणनखण्ड विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का म0स0
- भाग विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का म0स0

पूर्व में हम दो अंकों की संख्याओं का ल0स0 एवं म0स0 ज्ञात करना सीख चुके हैं अब हम तीन अंकों तक की संख्याओं का ल0स0 एवं म0स0 सीखेंगे-

गुणनखण्ड विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का ल0स0 - (अभाज्य गुणनखण्ड विधि)

अभाज्य गुणनखण्डों द्वारा दो अंकों की संख्याओं का ल0स0 ज्ञात करने की विधि से हम परिचित है अब यहाँ हम तीन अंकों तक की संख्याओं का ल0स0 ज्ञात करना सीखेंगे- सर्वप्रथम उदाहरण- 117, 221 उएवं 234 का ल0स0 ज्ञात कीजिए।

117, 221 एवं 234 के अभाज्य गुणनखण्डों का ल0स0 ज्ञात करने के लिए सभी संख्याओं को अभाज्य गुणनखण्ड के रूप में लिखेगें-

$117 = 3 \times 3 \times 13$

$221 = 13 \times 17$

$234 = 2 \times 3 \times 3 \times 13$

अतः ल0स0 $= 2 \times 3 \times 3 \times 13 \times 17$

$= 3978$

अतः तीन अंकों की संख्याओं का ल0स0 (गुणनखण्ड विधि) ज्ञात करने की विधि

(1) सर्वप्रथम संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

(2) सभी संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों को देखकर सबसे छोटा गुणनखण्ड चुनिए वह जिस किसी संख्या में सबसे अधिक बार आया हो, उसे उतनी बार लिख लीजिये।

(3) इनके बाद उससे बड़े अभाज्य गुणनखण्ड को चुनिए। वह भी जिस किसी संख्या में सबसे अधिक बार आया हो उसे भी उतनी बार लिख लीजिये।

(4) इसी क्रम में सभी गुणनखण्डों को लिखकर सभी का गुणा कर ल0स0 ज्ञात कर लीजिये।

उदाहरण 2- संख्याओं 117, 884 एवं 918 का ल0स0 ज्ञात कीजिए।

हल- समस्त संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों को ज्ञात करने के पश्चात उनको घातों में व्यक्त कीजिए। ल0स0 ज्ञात करने के लिये प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड की अधिकतम घात को लीजिये। अधिकतम घात का सर्वनिष्ठ होना आवश्यक नहीं है।

$117 = 3 \times 3 \times 13$

$= 3^2 \times 13$

$884 = 2 \times 2 \times 13 \times 17$

$= 2^2 \times 13 \times 17$

$918 = 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 13$

$= 2 \times 3^3 \times 17$

ध्यान दें- यहाँ 2 की अधिकतम घात 2, 3 की अधिकतम घात 3, 13 की अधिकतम घात 1 एवं17 की अधिकतम घात 1 है।

अतः ल0स0 $= 2^2 \times 3^3 \times 13 \times 17$

$= 23868$

भाग विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का ल0स0-

उदाहरण 3- 121, 286 एवं 418 का भाग विधि से ल0स0 ज्ञात कीजिए।

2	121, 286, 418
11	121, 143, 209
11	11, 13, 19
	1, 13, 19

ल0स0 $= 2 \times 11 \times 11 \times 13 \times 19$

$= 2 \times 121 \times 13 \times 19$

$= 59774$

अतः भाग विधि से ल0स0 ज्ञात करने की विधि-

(1) सर्वप्रथम कम से कम दो संख्याओं में उभयनिष्ठ सबसे छोटी अभाज्य संख्या से सभी संख्याओं मे भाग देते हुए भागफल उन संख्याओं के ठीक नीचे लिख लेते है।

(2) जिस संख्या मे भाग नहीं जाता है उसे उसके नीचे यथावत् लिख देते है।

(3) इस क्रिया को तब तक करते जाते हैं जब तक कि सभी संख्याओं के नीचे सह-अभाज्य संख्याएँ न आ जाएं

(4) इस प्रकार प्राप्त सभी भाजक संख्याओं तथा अन्तिम पंक्ति की सह-अभाज्य संख्याओं का परस्पर गुणा करके अभीष्ठ ल0स0 प्राप्त कर लेते हैं।

गुणनफल विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का म0स0 ज्ञात करना (अभाज्य गुणनखण्ड विधि)

अभाज्य गुणनखण्डों द्वारा दो अंकों की संख्याओं का म0स0 ज्ञात करने की विधि से हम परिचित है। अब यहाँ हम तीन अंकों तक की संख्याओं का म0स0 ज्ञात करना सीखेगें

उदाहरण 4- 120, 144 एवं 204 के अभाज्य गुणनखण्डों द्वारा म0स0 ज्ञात कीजिए।

हल- $120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$

$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$

$204 = 2 \times 2 \times 3 \times 17$

अतः म0स0 $= 2 \times 2 \times 3$

$= 12$

अतः तीन अंको तक की संख्याओं का म0स0 (गुणनखण्ड विधि) ज्ञात करने की विधि-

(1) पहले सभी संख्याओं के अभाज्य गुणनखण्डों को देखकर उनमें से सबसे छोटा अभाज्य गुणनखण्ड चुनिए। वह जितनी बार सभी संख्याओं के गुणनखण्डों में सर्वनिष्ठ हो उसे उतनी ही बार लिख लीजिये।

(2) इसी क्रम में उससे बड़े अभाज्य गुणनखण्ड को चुनकर वह जितनी बार सभी संख्याओं के गुणनखण्ड में सर्वनिष्ठ हो उसे भी उतनी बार लिख लीजिये।

(3) इसी प्रकार सभी सर्वनिष्ठ गुणनखण्डों को लिख लीजिये।

(4) सभी का गुणा करके अभीष्ट म0स0 ज्ञात कर लीजिए।

भाग विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का म0स0 -

उदाहरण- 671, 781 एवं 1441 का भाग विधि से म0स0 ज्ञात कीजिए

हल - 671, 781 एवं 1441 का भाग विधि से म0स0 निकाला गया है।

```
671) 781 (1                      (2)   11) 1441 (131
     671                                   11
     ---                                   --
     110) 671 (6                            34
          660                               33
          ---                               --
          11) 110 (10                        11
               11                            11
               --                            --
                0                             0
                0
               --
                0
```

तीनों संख्याओं का म0स0 = 11

अतः भाग विधि से तीन अंकों तक की संख्याओं का म0स0 ज्ञात करने की विधि-

(1) यहाँ बड़ी संख्या 781 में छोटी संख्या 671 से भाग दिया गया है। प्राप्त शेषफल 110 से पुनः प्रथम भाजक 671 में भाग दिया गया पुनः प्राप्त शेषफल 11 से 110 में भाग दिया गया शेषफल शून्य आने पर भाजक 11 संख्या 671 तथा संख्या 781 का म0स0 होगा।

अब संख्या 1441 में संख्या 11 से भाग दिया गया है शेषफल शून्य आने पर अन्तिम भाजक ही अभीष्ट म0स0 होगा। अतः उपरोक्त दी गई संख्याओं का म0स0 11 है।

ध्यान दें-

ल0स0 से तात्पर्य लघुतम समापवर्त्य है। इसे अंग्रेजी में Least Common Multiple अर्थात L.C.M. कहा जाता है। दी गई संख्याओं का ल0स0 ज्ञात करने से तात्पर्य होता है कि वह छोटी से छोटी संख्या प्राप्त की जाय जो कि दी गई संख्याओं से पूर्णतः विभाजित हो जाये। माना ऐसी संख्या ज्ञात करना है जो 2, 5 एवं 10 से विभाजित हो जाये तो वे संख्यायें क्रमशः 10, 20, 30, ... इत्यादि अनन्त संख्यायें होंगी। किन्तु इनमें छोटी से छोटी अर्थात् सबसे छोटी संख्या 10 है। अतः ल0स0 ज्ञात करने के लिए इनमे से सबसे छोटी संख्या अर्थात् 10 लिया जायेगा। अतः 2, 5 एवं 10 का ल0स0 10 होगा।

इसी प्रकार म0स0 से तात्पर्य महत्तम समापवर्तक है। इसे अंग्रेजी में Highest Common Factor अर्थात् H.C.F. कहा

जाता है। दी गई संख्याओं के म0स0 ज्ञात करने से तात्पर्य है कि वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात की जाये जो कि दी गई संख्याओं को पूर्णतः विभाजित कर दे। उदाहरणार्थ ऐसी संख्या ज्ञात करना जो संख्यायें 8, 16 एवं 24 को पूर्णतः विभाजित कर दें तो वह 2, 4, 8 संख्यायें होगीं। किन्तु इसमें से बड़ी संख्या (सबसे बड़ी) केवल 8 है। अतः संख्याओं 8, 16 एवं 24 का म0स0 संख्या 8 है।

याद रखें-

1. दी गई संख्याओं का ल0स0 दी गई संख्याओं में से सबसे बड़ी संख्या हो सकती है और यदि ऐसा नहीं हो तो वह ऐसी संख्या होगी जिसका मान दी गई प्रत्येक संख्या से अधिक होगा।

2. दी गई संख्याओं का म0स0, दी गई संख्याओं में से सबसे छोटी संख्या हो सकती है और यदि ऐसा नहीं हो तो वह ऐसी संख्या होगी जिसका मान दी गई प्रत्येक संख्या से छोटा होगा।

(3) सहअभाज्य संख्याओं का म0स0 सदैव 1 होता है।

मूल्यांकन

(1) 125, 220 तथा 275 का ल0स0 ज्ञात कीजिए। (गुणनखण्ड विधि से)

(2) 200, 250 तथा 300 का ल0स0 ज्ञात कीजिए। (भाग विधि से)

(3) 101, 901 तथा 1111 का म0स0 गुणनखण्ड विधि से ज्ञात कीजिए।

(4) 625, 3125, 15625 का म0स0 भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

(5) वह छोटी से छोटी संख्या बताइए जो 20, 25 एवं 40 से पूर्णतः विभाज्य हो।

(6) वह बड़ी से बड़ी संख्या ज्ञात करो जिससे 590, 908 तथा 1014 को भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचें।
(संकेत : 908 - 590 = 318, 1014 - 590 = 424, 1014 - 908 = 106, अब 106, 318 तथा 424 का म0स0 ज्ञात करो।

(7) वह छोटी से छोटी संख्या है, जिसको 15, 25 और 30 से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थित में 11 शेष रहे-

(1) 139	(2) 150
(3) 149	(4) 161

(8) वह बड़ी से बड़ी संख्या जिससे 133 और 78 को विभाजित करने पर शेष 3 बचें है-

(1) 3	(2) 4
(3) 5	(4) 1

(9) तीन अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या जिसे यदि 5, 9 और 15 से विभाजित करने पर प्रत्येक स्थिति पर 3 शेष बचे है-

(1) 897	(2) 990
(3) 900	(4) 993

(10) एक रसायन फैक्ट्री मालिक के पास विभिन्न रसायनों के 18 kg, 45 kg और 36 kg के तीन थैले हैं। वह रसायनों को समान भार के छोटे-छोटे थैलों में रखता है। प्रत्येक थैले का अधिकतम भार होगा-

(1) 18 kg	(2) 6 kg
(3) 9 kg	(4) 5 kg

(11) प्रतीक, अजय और असलम किसी वृत्ताकार मार्ग का एक चक्कर 12 मिनट, 15 मिनट और 18 मिनट में लगाते हैं। यदि सभी ने सुबह 8.30 पर किसी निश्चित स्थान से एक साथ दौड़ना प्रारम्भ किया। वह समय जब वे तीनों पुनः दुबारा उस स्थान पर एक साथ होंगे-

(1) 180 मिनट	(2) 3 घंटा
(3) 11 a.m.	(4) 11.30 a.m.

इकाई - 2

व्यंजक में प्रयुक्त जोड़, घटाना, गुणा, भाग के संकेतों तथा कोष्ठकों का सरलीकरण

इस इकाई के अध्ययन से निम्नांकित की जानकारी होगी-

- बीजीय व्यंजक की अवधारणा
- सजातीय और विजातीय पद
- व्यंजकों का जोड़ना-घटाना
- व्यंजकों का गुणा
- व्यंजकों का भाग
- कोष्ठक

प्रशिक्षुओं से एक क्रियाकलाप करायें जिसमें उनको एक डिब्बा दिखाते हुए पूछें कि उसमें कितनी गोलिया हैं ? कुछ प्रशिक्षु 2 गोलियाँ, 5 गोलियाँ, 7 गोलियाँ आदि बता सकते है। कुछ यह भी कह सकते हैं कि उन्हें पता नहीं है कि डिब्बे में कितनी गोलियाँ हैं। अब इन गोलियों के बराबर और गोलियँ डिब्बे में डाल दें। इस बार भी उत्तर अलग-अलग प्राप्त होगा।

अब यहाँ पर प्रशिक्षुओं से कहें कि वे मान ले कि डिब्बे में पहले से x गोलियाँ हैं। अतः अब डिब्बें में गोलियों की संख्या $= x + x$ होगी।

बीजीय व्यंजक की अवधारणा-

एक व्यवहारिक उदाहरण देकर बीजीय व्यंजक को स्पष्ट करें।

जैसे- रमेश ने x रूपये प्रति पेंसिल की दर से 5 पेंसिल, 5 रूपये प्रति कॉपी की दर से 8 कापियाँ खरीदा। उसने कुल कितने रूपये व्यय किये ?

यहाँ पर,

x रूपये प्रति पेंसिल की दर से 5 पेंसिलों का मूल्य $= 5x$ रूपये

5 रूपये प्रति कॉपी की दर से 8 कॉपियों का मूल्य $= 8y$ रूपये

$\therefore$ कुल मूल्य $= (5x + 8y)$ रूपये

मूल्य में $(5x+8y)$ रूपयों की संख्या प्रकट करता है। इसे बीजीय व्यंजक कहते हैं।

इसी प्रकार 1000, $p,\ 4x + 9y,\ 4x - 11y,\ 4s - 5,\ \frac{u}{v},\ \sqrt{5} - \sqrt{p}$ भी व्यंजक हैं।

कोई संख्या अथवा मौलिक गणितीय संक्रियाओं से युक्त संख्याओं का समूह बीजीय व्यंजक कहे जाते हैं।

प्रशिक्षुओं से व्यंजकों के भिन्न-भिन्न उदाहरण प्राप्त करें। जिससे उनकी व्यंजकों के प्रति अवधारणा स्पष्ट हो सकें।

$4x + 9y$ में $4x$ और $9y$ दो पद हैं।

$3x + 4y + 7z$ में $3x, 4y$ और $7z$ तीन पद हैं।

किसी पद के बीज के पहले लगी संख्या जैसे $\frac{9}{10}p^2$ में $\frac{9}{10}$ को गुणांक कहते हैं, क्योंकि $\frac{9}{10}p^2$ का अर्थ $\frac{9}{10} \times p^2$ है

इसी प्रकार $4x - 7y$ में x का गुणांक 4 और y का गुणांक -7 है।

स्पष्ट करें कि yz और zy एक ही है।

अन्य उदाहरण देकर इसे और स्पष्ट करें।

सजातीय और विजातीय पद-

प्रशिक्षुओं को व्यंजक $7x + 8y + 10x$ पर विचार करने को कहें। यह स्पष्ट करायें कि इस व्यंजक में तीन पद हैं। किन्तु प्रथम और तृतीय पदों में समानता है- दोनों में बीज x प्रयुक्त हुआ है और x प्रथम घात में है। ऐसे पद सजातीय कहे जाते हैं। सजातीय व्यंजक को आपस में जोड़-घटा कर व्यंजक को सरल किया जा सकता है।

जैसे- $7x + 8y + 10x = 7x + 10x + 8y$

$$= 17x + 8y$$

$17x$ और $8y$ का योगफल अब और सरल नहीं किया जा सकता है, क्योंकि x और y अलग-अलग संख्याएं निरूपित करती है। इस प्रकार व्यंजक $7x + 8y + 10x$ में दूसरा पद $8y$, प्रथम और तृतीय पदों से विजातीय है। अतः किसी व्यंजक में सजातीय एवं विजातीय पद हो सकते हैं।

$5x + 7x + 10x^2 + \frac{2}{5}x^2$ में चारों पद में प्रशिक्षुओं से सजातीय एवं विजातीय पद पूछें।

अंततः व्यंजकों में सजातीय एवं विजातीय पद पहचानने के लिए प्रशिक्षुओं से अन्य उदाहरण लेकर स्पष्ट करें।

बीजीय व्यंजकों की संक्रियायें-

(A) व्यंजकों का जोड़ना-घटाना-

व्यंजकों का जोड़ और घटाना दो प्रकार से सिखाया जाता है। पहली विधि यह है कि सजातीय पदों को स्तम्भों में लिखकर उसके बाद क्षैतिज रूप में सजातीय पदों को एकत्र कर व्यंजक को सरल करायें।

व्यंजकों को उर्ध्वाधरतः योग करते समय सजातीय पदों को एक ही स्तम्भ में एक के नीचे दूसरे को लिखा जाता है। ध्यान दें कि प्रत्येक पद अपने चिन्ह के साथ लिखा जाय।

जैसे- $3xy + 5y + z$ और $2xy + 7y$ का योग निम्नलिखित प्रकार से कराएँ-

$$\begin{array}{r} 3xy + 5y + z \\ + \; 2xy + 7y \\ \hline 5xy + 12y + z \\ \hline \end{array}$$

इन व्यंजकों को क्षैतिज रूप में एक ही पंक्ति में लिखकर सजातीय पदों को एकत्र करके उनका योगफल ज्ञात करें-

जैसे- $(3xy + 5y + z) + (2xy + 7y)$

$$= 3xy + 2xy + 5y + 7y + z$$
$$= 5xy + 12y + z$$

प्रशिक्षुओं से अन्य उदाहरण देकर इसे स्पष्ट करें।

व्यंजकों का घटाना करते समय इस बात का ध्यान देना चाहिए कि जिस व्यंजक को घटाना है, उसके पदों के चिन्ह '+' से '–' और '–' से '+' में बदलकर सजातीय पदों को एकत्र किया जाता है और उनका योगफल ज्ञात किया जा सकता है। प्रशिक्षुओं को पूर्णांकों के योग और अंतर को ध्यान कराते हुए बताइये कि वे जानते हैं-

$-(-2) = 2$

$-(-5) = 5$

$-(+7) = -7$

$-(+100) = -100$ इत्यादि।

इसी जानकारी को बीजीय व्यंजकों के संदर्भ में स्पष्ट करें।

जैसे- $-(-y) = y, -(+x) = -x, + (-x) = -x$

उदाहरण- $3xy + 5y + z$ में से $2xy + 7y - z$ को घटाने की संक्रिया बतायें और स्पष्ट करें।

$$\begin{array}{l} 3xy + 5y + z \\ 2xy + 7y - z \\ - \quad - \quad + \\ \hline xy - 2y + 2z \\ \hline \end{array}$$

क्षैतिजतः-

$$\begin{aligned} &(3xy + 5y + z) - (2xy + 7y - z) \\ &= 3xy + 5y + z - 2xy - 7y + z \\ &= 3xy - 2xy + 5y - 7y + z + z \\ &= xy - 2y + 2z \end{aligned}$$

(B) व्यंजकों का गुणा-

(i) एक पदीय व्यंजकों का गुणा-

प्रशिक्षु $2x, 3x^2, yz, x^2y, 3x^2, 4y^2$ आदि एक पदीय व्यंजक से अवगत हो चुके हैं।

प्रशिक्षुओं से $3x^2$ मे $9x^4$ का गुणा करने को कहें।

$3x^2 = 3 \times x \times x$

और $9x^4 = 3 \times 3 \times x \times x \times x \times x$

$\therefore$ प्रशिक्षुओं से हल करवायें कि

$$\begin{aligned} 3x^2 \times 9x^4 &= 3 \times x \times x \times 9 \times x \times x \times x \times x \\ &= 3 \times 9 \times x \times x \times x \times x \times x \times x \\ &= 27x^6 \end{aligned}$$

या $3x^2 \times 9x^4 = 3 \times 9 \times x^{2+4} = 27x^6$

इस प्रकार अन्य उदाहरण लेकर प्रशिक्षुओं से निष्कर्ष निकलवायें कि एक पदीय व्यंजकों के गुणा में गुणांकों को आपस में गुणा करते हैं तथा बीजों (चरों) के गुणनफल **घातों के गुणा नियम** की सहायता से ज्ञात कर लेते हैं।

(ii) एक पदीय व्यंजक से बहुपदीय व्यंजक में गुणा-

प्रशिक्षुओं से अंकगणित में गुणनफल के योगफल पर वितरण नियम के अनुप्रयोग को ध्यान कराते हुए इस क्रिया को शुरू करायें-

जैसे- $3x(2y + z) = (3x) \times (2y) + (3x) \times (z)$

$$\begin{aligned} &= (3 \times 2 \times x \times y) + (3x \times z) \\ &= 6xy + 3xz \end{aligned}$$

इसी प्रकार,

$$\begin{aligned} &3x(4x^3 + 5xy + y^2 - x + 10001) \\ &= (3x \times 4x^3) + (3x \times 5xy) + (3xy^2) - (3x \times x) + (3x \times 10001) \\ &= 12x^4 + 15x^2y + 3xy^2 - 3x^2 + 30003x \end{aligned}$$

इस प्रकार प्रशिक्षुओं से अन्य उदाहरण लेकर उनसे निष्कर्ष निकलवायें कि एक पदीय व्यंजक से बहु पदीय व्यंजक में गुणा करते समय गुणक से बहुपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद से अलग-अलग गुणा करके गुणनफल **चिन्ह सहित** लिया जाता है।

(iii) बहुपदीय व्यंजकों का गुणा-

इस क्रिया को शुरू करने के पूर्व प्रशिक्षुओं से कुछ प्रश्न इस प्रकार पूछें-

(1) एक पुस्तक विक्रेता ने $(p^2 + 3pq + q^2)$ पुस्तकें खरीदीं। यदि एक पुस्तक का मूल्य $(p + 2q)$ रूपये हो, तो उसने कुल कितने रूपये की पुस्तकें खरीदीं ?

(2) यदि एक आयत की लम्बाई $(x + y)$ मीटर और चौड़ाई $(x - y)$ मीटर है, तो आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

इस प्रकार के प्रश्नों से प्रशिक्षु यह अनुभव करेंगे द्विपदीय, त्रिपदीय आदि व्यंजकों की गुणा करने की आवश्यकता क्यों पड़ती है।

जैसे- $(2x + 3y) \times (3x - 2y)$

$$= 2x(3x - 2y) + 3y(3x - 2y)$$
$$= 2x \times 3x - 2x \times 2y + 3y \times 3x - 3y \times 2y$$
$$= 6x^2 - 4xy + 9yx - 6y^2$$
$$= 6x^2 - 4xy + 9xy - 6y^2 \; (\because xy = yx)$$
$$= 6x^2 + 5xy - 6y^2$$

उपर्युक्त गुणा की संक्रिया को निम्नांकित रूप से भी प्रस्तुत किया जा सकता है-

$$\begin{array}{rr} & 2x + 3y \\ \times & 3x - 2y \\ \hline & 6x^2 + 9xy \\ & -4xy - 6y^2 \\ \hline & 6x^2 + 5xy - 6y^2 \\ \hline \end{array}$$

(C) व्यंजकों से भाग-

एक बीजीय व्यंजक का दूसरे बीजीय व्यंजक में भाग कि संक्रिया बताने के लिए यह आवश्यक है कि एक बार पुनः प्रशिक्षुओं का ध्यान आकृष्ट करें कि $\frac{75}{15} = 5$ एक सत्य कथन है, जिससे और दो सत्य कथन बनते हैं-

$75 = 15 \times 5$ और $\frac{75}{5} = 15$

वैसे ही यदि

$\frac{x}{y} = z$ तो $x = yz$ और $\frac{x}{z} = y$

यदि $x+2$ तथा $8x + 9$ दो अन्य व्यंजक हों तो प्रशिक्षुओं से पूछें कि

$$(x + 2) : (8x + 9) = y$$

अर्थात् $\frac{x+2}{8x+9} = y$ का क्या अर्थ है ?

$\frac{x+2}{8x+9} = y$ का अर्थ है $x + 2 = y(8x + 9)$ और $\frac{x+2}{y} = 8x+9$

अन्य बीजीय व्यंजक $(x^2 - 4) \div (x + 2)$ ले सकते हैं, जिसे प्रशिक्षु गुणन खण्ड सीखने के बाद आसानी से बता सकेंगे कि इसका मान $(x - 2)$ क्यों होगा ?

कोष्ठक (Brackets)- प्रशिक्षुओं को इसे एक उदाहरण के माध्यम से समझाये।

माना रमेश के पास $2x$ अमरूद है, उसमें से y अमरूद अपनी बहन को दे दिया। इसके बाद शेष बचे अमरूदों का आधा करके 40 निकाल दिया। निकालने के बाद शेष का तिगुना करके पुनः $3x$ जोड़ दिया, जोड़ने के बाद प्राप्त अमरूदों की संख्या में y से गुणा कर दिया। आइये उपर्युक्त घटनाओं को निम्नवत् रूप से लिखते हैं-

रमेश के पास अमरूदों की संख्या $= 2x$

उसके बहन के अमरूदों की संख्या $= y$

शेष अमरूद $= 2x - y$

शेष अमरूद का आधा $= \frac{1}{2}(2x - y)$

यहाँ पर $2x - y$ का संयुक्त आधा दिखाने के लिए '( )' चिन्ह का प्रयोग करना पड़ा। इसे छोटा कोष्ठक (Parentheses or Round Bracket) कहते हैं।

शेष में से 40 अमरूद निकालने पर प्राप्त व्यंजक होगा $= \frac{1}{2}(2x - y) - 40$

इसका तिगुना करके इस कथन को $3\{\frac{1}{2}(2x - y) - 40\}$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे। यहाँ { } चिन्ह को मँझला कोष्ठक (Curly bracket) कहते हैं।

पुनः उपर्युक्त व्यंजक में $3x$ जोड़ने पर लिखेंगे

$$3x + 3\{\frac{1}{2}(2x - y) - 40\}$$

अन्ततः उपर्युक्त में y से गुणा करने पर इस कथन को $y[3x + 3\{\frac{1}{2}(2x - y) - 40\}]$

द्वारा दर्शायेंगे, जहाँ चिन्ह [ ] को बड़ा कोष्ठक (Square Bracket) कहते हैं।

आइये हम इन कोष्ठक युक्त व्यंजकों को सरल करने के तरीकों को उदाहरण द्वारा समझें।

जैसे- $4x^3 - [9x^2 - \{-5x^3 - (7 - 9x^5) + 7x^2\}]$ को हल करें।

$$\begin{aligned} 4x^3 - [9x^2 - \{-5x^3 - (7 - 9x^5) + 7x^2\}] &= 4x^3 - [9x^2 - \{-5x^3 - (7 - 9x^5) + 7x^2\}] \\ &= 4x^3 - [9x^2 - \{-5x^3 - 7 + 9x^5 + 7x^2\}] \\ &= 4x^3 - [9x^2 + 5x^3 + 7 - 9x^5 - 7x^2] \\ &= 4x^3 - 9x^2 - 5x^3 - 7 + 9x^5 + 7x^2 \\ &= 9x^5 + 4x^3 - 5x^3 - 9x^2 + 7x^2 - 7 \\ &= 9x^5 - x^3 - 2x^2 - 7 \end{aligned}$$

यहाँ पर हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकालते हैं-

- प्रायः हम रेखा कोष्ठक एक छोटे कोष्ठक ( ) को सबसे अन्दर, फिर मँझला कोष्ठक { } और अन्त में [ ] बड़ा कोष्ठक लगाते हैं।
- कोष्ठक खोलते समय यदि कोष्ठक के बराबर + का चिन्ह होता है, कोष्ठक के भीतर के पदों के चिन्ह नहीं बदलते हैं जबकि कोष्ठक के बाहर '–' का चिन्ह हो, तो कोष्ठक खोलने पर उसके पदों के चिन्ह बदल दिए जाते हैं।
- यदि किसी व्यंजक में एक से अधिक कोष्ठकों का प्रयोग हुआ हो, तो हम सबसे भीतर वाले कोष्ठक को तोड़ते हुए इस क्रम में बाहर की ओर आते हैं।
- दो या दो से अधिक कोष्ठकों के बीच कोई चिन्ह न हो, तो वहाँ गुणा का चिन्ह मानते हैं।

मूल्यांकन-

1. $\frac{x}{y} - 7$ में कुल कितने पद हैं ?

2. क्या बीजीय व्यंजकों $3xy+\frac{7}{2}$ और $3yx+\frac{7}{2}$ में अन्तर है ? यदि नहीं तो क्यों ?

3. $4x - y, 7x + y, 8x + 7y$ को जोड़िए।

4. $(x^2 + y^2 - 2xy)$ से $(x^2 - y^2 + 4xy)$ घटाइये।

5. एक रेलगाड़ी की चाल $(2x^2 + x + 9)$ किमी/घंटा है। वह $(8+ 9y)$ घण्टे में कितनी दूर जायेगी ?

6. यदि $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

तो $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x + y}$ का मान क्या होगा ?

7. $2x - [7y - \{-9x + y (101 - x)]$ को सरल कीजिए ?

8. x और y का योगफल है-

(1) $5x$ (2) $x + y$ (3) $x - 5$ (4) $\frac{x}{5}$

9. निम्नांकित व्यंजकों में से विजातीय व्यंजक है-

(1) $3x^2y$ (2) $3yx^2$ (3) $3xxy$ (4) $2x^3y$

10. बीजीय व्यंजक $2x + y - z - (3x + y + 2z)$ का मान होगा-

(1) $2x + y - z$ (2) $x + 2y + 3y$ (3) $-x + z$ (4) $-x - 3z$

11. बीजीय व्यंजक $5xy + [3z - \{2x - (2z - 3y)\}]$ का मान है-

(1) $5xy$ (2) $5xy + 3z$ (3) $5xy + 5z - 2x - 3y$ (4) इनमें से कोई नहीं

इकाई - 3

प्राकृतिक, पूर्ण, पूर्णांक तथा परिमेय संख्याओं की अवधारणा

इस इकाई के अध्ययन से निम्नांकित की जानकारी होगी-

- प्राकृतिक संख्या
- पूर्ण संख्या
- पूर्णांक
- परिमेय संख्या

प्राकृतिक संख्या-

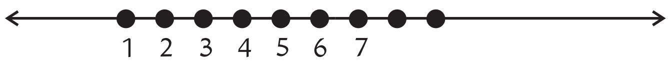
प्रशिक्षुओं को सर्वप्रथम कक्षा में उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या को गिनकर बताने को कहें। उन से उपस्थित बालक और बालिकाओं की संख्या अलग-अलग गिनकर बताने को कहें।

इस प्रकार हम यह देख रहें कि हमारे आस-पास जो वस्तुएं उपलब्ध हैं, उन्हें गिनकर उनकी संख्या बताने में आसानी होती है।

अतएव गिनती करने वाली संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ही प्राकृतिक संख्याएँ कहलाती हैं।

प्राकृतिक संख्याओं का संख्या-रेखा पर प्रदर्शन-

प्रशिक्षुओं से कोई रेखा खींचने को कहें। उस रेखा पर समान दूरी के अन्तर पर बिन्दुओं को चिन्हित करवायें। इन बिन्दुओं द्वारा क्रम से संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... निरूपित कीजिए।



वस्तुओं की गिनती 1 से ही प्रारम्भ होती है, अतः आप प्रशिक्षु लोग देख रहे हैं कि -

1 सबसे छोटी एवं पहली प्राकृति संख्या हैं।

परवर्ती संख्या -

प्रशिक्षु प्राकृतिक संख्याओं से परिचित है। 1, 2, 3 .... को प्राकृतिक संख्या कहते है। 1 के बाद अगली प्राकृतिक संख्या 2 है। 1 में जोड़ने पर 2 प्राप्त होता है। इसी प्रकार 2 में 1 जोड़ने पर अगली संख्या 3 प्राप्त होती है। इस प्रकार किसी प्राकृतिक संख्या में 1 जोड़नेपर उसकी अगली (ठीक बाद वाली) प्राकृतिक संख्या प्राप्त होती है। जिसे उसकी परवर्ती संख्या कहते है। अतः

> यदि किसी दी हुई संख्या में 1 जोड़ दिया जाय तो प्राप्त संख्या दी हुई संख्या की परवर्ती, उत्तरवर्ती या अनुवर्ती संख्या (successor) कहलाती है।

प्रशिक्षुओं से निम्न सारणी को भरवायें -

संख्या	5	15	10	38	49
परवर्ती संख्या	6	-	-	-	-

पूर्ववर्ती संख्या -

प्रशिक्षु परवर्ती संख्या से भली भाँति परिचित हो चुके है। अब आप बताइये कि 11 से पुनः 10 प्राप्त करने के लिए क्या करेंगे ? 11 से पुनः 10 प्राप्त करने के लिए 11 में से 1 घटाना पड़ेगा। इस प्रकार किसी प्राकृतिक संख्या में से 1 घटाने पर उसके ठीक पहले वाली संख्या प्राप्त होती है। जैसे 16 में से 1 घटाने पर 16 के एक पूर्व वाली संख्या अर्थात् 15 प्राप्त होती है। इस प्रकार संख्या 15, संख्या 16 की पूर्ववर्ती संख्या है, जबकि जबकि संख्या 16, संख्या 15 की परवर्ती संख्या है।

अतः

किसी दी हुई संख्या में से 1 घटा दिया जाए तो प्राप्त संख्या, दी हुई संख्या की पूर्ववर्ती (predecessor) संख्या कहलाती है।

क्रियाकलाप-

प्रशिक्षु निम्न सारणी में रिक्त स्थान की पूर्ति करें।

संख्या	5	12	18	24	36	50	100
परवर्ती संख्या	-	-	19	-	-	-	-
पूर्ववर्ती संख्या	4	-	-	-	-	49	-

इस प्रकार उपरोक्त चर्चा से स्पष्ट हैं कि-

(i) सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या 1 है।

(ii) किसी प्राकृतिक संख्या में 1 जोड़ने पर प्राप्त संख्या, उस संख्या की उत्तरवर्ती संख्या कहलाती है।

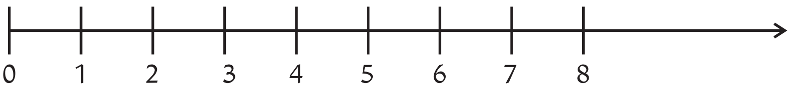
(iii) किसी प्राकृतिक संख्या की पूर्ववर्ती संख्या, वह संख्या होती है जो दी गई संख्या में 1 घटाने पर प्राप्त होती है।

(vi) प्राकृतिक संख्या में 1 की पूर्ववर्ती संख्या नहीं होती है।

(v) कोई भी प्राकृतिक सबसे बड़ी संख्या नहीं कही जा सकती है क्योंकि उससे भी एक उत्तरवर्ती संख्या प्राप्त होती है।

पूर्ण संख्या- प्राकृतिक संख्या में शून्य को सम्मिलित करने पर प्राप्त संख्याएं पूर्ण संख्याएं कहलाती हैं।

0, 1, 2, 3, ... आदि पूर्ण संख्याएं हैं।



उपर्युक्त रेखा पर संख्या का प्रदर्शन, पूर्ण संख्याओं का प्रदर्शन हैं।

उपर्युक्त संख्या रेखा से निम्नांकित निष्कर्ष निकलता हैं-

(1) 0 के बायीं ओर कोई पूर्ण संख्या नहीं है।

(2) कोई भी पूर्ण संख्या सबसे बड़ी संख्या नहीं होती है।

पूर्णांक- प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न हल करवायें-

(i) 100 - 100 = 0

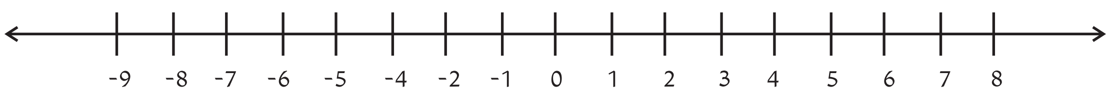
(ii) 9 - 3 = 6

(iii) 5 - 7 = ...

(iv) 35 - 52 = ...

उपर्युक्त चार प्रश्नों में से प्रथम दो के उत्तर 0 और 6 पूर्ण संख्या पद्धति में है। परन्तु अन्तिम दोनों प्रश्नों का हल हेतु पूर्ण संख्या पद्धति अपर्याप्त है। प्रशिक्षुओं से यह निष्कर्ष निकलवायें कि छोटी पूर्ण संख्या में से बड़ी पूर्ण संख्या घटाने पर संख्या पद्धति जो पूर्ण संख्या के लिए है, उसका विस्तार करना पड़ेगा।

संख्या रेखा, पूर्णांकों के लिए, निम्नवत् है-



संख्या रेखा की सहायता उपरिलिखित प्रश्न (3) व (4) को हल किया जा सकता है।

पूर्णांकों का क्रमायोजन- संख्या रेखा की सहायता से प्रशिक्षुओं को बतायें कि कोई पूर्ण संख्या, अपने बाईं ओर की पूर्ण

संख्या से बड़ी होती है।

पूर्णाकों के लिए भी यह नियम सत्य हैं।

यथा-

(1) + 5 > + 4

(2) + 1 > + 0

(3) 0 > -1

(4) -10 > - 19

उपर्युक्त से निष्कर्ष निकलवाएँ कि-

1. प्रत्येक धन पूर्णांक, प्रत्येक ऋण पूर्णांक से बड़ा है।

2. सभी धन पूर्णांक, शून्य से बड़े है।

3. सभी ऋण पूर्णांक, शून्य से छोटे हैं।

किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उस पूर्णांक का संख्यात्मक मान होता है।

जैसे - $|+5| = 5$

$|-10| = 10$

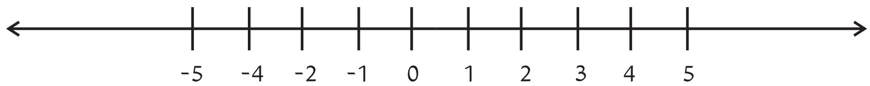
परिमेय संख्या- प्रशिक्षुओं को स्पष्ट करें कि $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}, \frac{7}{8}, 2\frac{5}{7}, 9\frac{1}{3}$ आदि परिमेय संख्या हैं।

इसी प्रकार $\frac{-2}{7}, \frac{-5}{8}, -3\frac{5}{12}$ आदि भी ऋणात्मक परिमेय संख्या हैं। ये परिमेय संख्या प्राकृतिक संख्याएं, पूर्ण संख्याएं और पूर्णांक नहीं है।

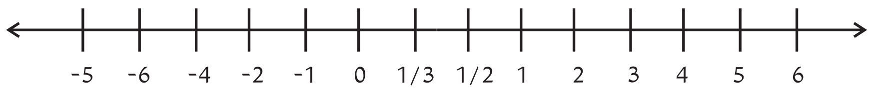
अत एव प्रशिक्षुओं से यह निष्कर्ष निकलवाएं कि पूर्णांक संख्या पद्धति का भी विस्तारण आवश्यक है।

परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन-

(1) प्रशिक्षुओं से संख्या रेखा खिंचवाकर उस पर पूर्णांक को प्रदर्शित कराएं।



(2) संख्या रेखा पर $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ को प्रदर्शित कराइयें-



ध्यान दें! इस संख्या रेखा में 0 से 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... और 0 से -1, -2, -3, -4, -5, -6 ...... प्रत्येक का अंतराल समान होना चाहिए। 0 और 1 के बीच में $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ भाग के बराबर उसे अंकित करें।

परिमेय संख्याओं की तुलना-

प्रशिक्षुओं से निम्नांकित भिन्न-युग्मों में छोटी-बड़ी संख्याओं को निकलवायें-

(1) $\frac{2}{7}, \quad \frac{4}{7}$

(2) $\frac{3}{4}, \quad \frac{5}{8}$

(3) $\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}$

प्रशिक्षुओं से निम्नांकित युग्मों में से छोटी-बड़ी परिमेय संख्याएं निकलवाएँ-

(1) $\frac{1}{2}, \quad \frac{-3}{4}$

(2) $\frac{-7}{8}, \quad \frac{+1}{4}$

(3) $-3\frac{1}{2}, \ 1\frac{1}{2}$

संख्या रेखा पर उक्त परिमेय संख्याओं को प्रदर्शित करायें तथा स्पष्ट करें कि पूर्णांकों में क्रमायोजन का नियम इसमें भी लागू होता है। जैसे :

(1) $\frac{1}{2} > \frac{-3}{4}$ (2) $\frac{-7}{8} < \frac{+1}{4}$ (3) $-3\frac{1}{4} < 1\frac{1}{4}$

प्रशिक्षुओं से निम्नलिखित निष्कर्ष निकलवायें कि-

(i) धनात्मक परिमेय संख्याएँ, ऋणात्मक परिमेय संख्याओं से बड़ी होती है।

(ii) ऋणात्मक परिमेय संख्या, 0 से छोटी होती है।

(iii) दो धनात्मक परिमेय संख्याओं को समहर करने पर जिसका अंश बड़ा होगा, वह परिमेय संख्या बड़ी होती है।

(iv) दो ऋणात्मक परिमेय संख्याओं को समहर करने पर जिसका अंश बड़ा होगा, वह छोटी होती है।

(v) प्रत्येक प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या एवं पूर्णांक परिमेय संख्या के रूप में प्रदर्शित की जा सकती है।

जैसे- $0 = \frac{0}{1}, \quad -10 = -\frac{-10}{1} = \frac{-100}{10}$

$5 = \frac{5}{1}, \ \dots\dots\dots,$

(vi) प्रत्येक परिमेय संख्या या तो सान्त दशमलव रूप में व्यक्त की जा सकती है अथवा असान्त आवर्ती दशमलव के रूप में। जैसे $\frac{2}{5} = .4$ को सान्त दशमलव में व्यक्त किया जा सकता है और $\frac{22}{7} = 3.\overline{142857}$ को असान्त दशमलव में व्यक्त किया जा सकता है।

मूल्यांकन-

1. निम्नांकित में से प्राकृतिक संख्या को छांटिएँ-

   0, 353, 765, $3\frac{1}{4}$, $\frac{-7}{8}$, $2\frac{3}{4}$

2. निम्नलिखित में से पूर्ण संख्या को छांटिए-

   762, 252, -312, $2\frac{1}{18}$,18, 35, -37

3. निम्नलिखित में से पूर्णांक को छांटिए-

   4002, -3602, 799, 2.5, 3.7, 0

4. निम्नलिखित में से परिमेय संख्या बताइये-

   $\sqrt{3}, \sqrt{2}$, 7, 0, 3.5, 2.333

5. निम्नांकित संख्याओं में से प्राकृतिक संख्या नहीं है-

   (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 81

6. निम्नांकित संख्याओं में से पूर्ण संख्या है-

   (1) 0 (2) -1 (3) $\sqrt{2}$ (4) इनमें से कोई नहीं

7. निम्नांकित संख्याओं में से पूर्णांक नहीं है-

(1) 325 (2) 100 (3) 0 (4) इनमें से कोई नहीं

8. निम्नांकित संख्याओं में से परिमेय संख्या नहीं है-

(1) $\sqrt{4}$ (2) 0 (3) $\sqrt{2}$ (4) 2

9. निम्नलिखित कथनों में से सत्य कथन है-

(1) सभी पूर्ण संख्याएं पूर्ण संख्या होती है।

(2) सभी प्राकृत संख्याएं प्राकृत संख्या होती है।

(3) परिमेय संख्या सदैव प्राकृतिक संख्या होती है।

(4) पूर्णांक सदैव पूर्ण संख्या होती है।

10. पूर्ण संख्या 500 की क्रमागत संख्या होगी-

(1) 560 (2) 550 (3) 600 (4) 501

इकाई - 4

पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं (जोड़, घटाना, गुणा और भाग) के प्रगुण

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी होगी-

- पूर्ण संख्या
- संख्या रेखा
- संख्या रेखा पर योग
- संख्या रेखा पर घटाना
- संख्या रेखा पर गुणा
- पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं के प्रगुण

जैसे- 5 की पूर्ववर्ती संख्या 5 - 1 = 4 होगी।

पूर्ण संख्या- जब हम प्राकृतिक संख्या के साथ शून्य को लेते हैं तो वे संख्याएं पूर्ण संख्याएं (Whole number) कहलाती है। इस प्रकार 0, 1, 2, 3, 4......... पूर्ण संख्याएँ हैं। 0 सबसे छोटी पूर्ण संख्या हैं। चूँकि प्रत्येक पूर्ण संख्या से बड़ी पूर्ण संख्याएँ होती है। अतः कोई भी पूर्ण संख्या सबसे बड़ी पूर्ण संख्या नही होती है।

क्रमागत पूर्ण संख्याएँ

प्रशिक्षु निम्नांकित संख्याओं के प्रत्येक समूह पर ध्यान दें,

4, 5, 6; 18, 19, 20; 28, 29, 30;

9, 10, 11 12; 52, 53, 54, 55, 56

उपरोक्त समूहों में संख्याएँ बायें से दायें क्रमशः 1-1 के अन्तर से बढ़ रही हैं। समूह में आगे आने वाली कोई भी संख्या अपने ठीक पहले की संख्या की उत्तरवर्ती संख्या है। किसी समूह की दस विशेषता वाली सभी संख्याएँ क्रमागत संख्याएँ कहलाती है। जरा सोचिए कि क्या संख्याएँ 15, 17, 20 क्रमागत संख्याएँ हैं ? नहीं, यह क्रमागत संख्या नही है। दो क्रमागत पूर्ण संख्याओं का अन्तर सदैव 1 होता हैं।

क्रियाकलाप-

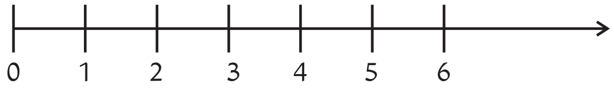
1. कोई तीन क्रमागत संख्या लीजिए। पहली संख्या और तीसरी संख्या को जोड़िए। प्राप्त योगफल का आधा कीजिए। इस प्रकार प्राप्त संख्या से बीच वालीसंख्या की तुलना कीजिए।

उपरोक्त क्रियाकलाप को करने के उपरान्त आप देखेंगे कि-

तीन क्रमागत पूर्ण संख्याओं में पहली और तीसरी संख्याओं के योगफल का आधा बीच वाली संख्या होती हैं।

पूर्ण संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन- एक रेखा खींचिए। इस पर एक बिन्दु जिसे 'शून्य' अर्थात् O से अंकित करें इस बिन्दु के दाईं ओर एक अन्य बिन्दु लीजिए और उसे बिन्दु **'1'** से अंकित करें। इसी क्रम में दाई ओर एक के बाद एक बिन्दु को अंकित करते जाएं और इन बिन्दुओं को 2, 3, 4, 5, 6, ... आदि से नामांकित किया जाए। ध्यान दें कि संख्या रेखा पर प्रत्येक दो क्रमिक बिन्दुओं के बीच की दूरी सदैव समान होती है।

नीचे दी हुई रेखा, पूर्ण संख्याओं के लिए संख्या रेखा है-



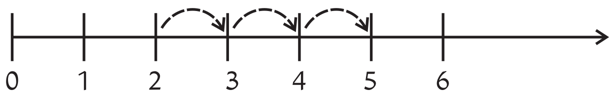
संख्या रेखा पर देखने से स्पष्ट है कि संख्या 6, संख्या 2 के दाई ओर स्थित है। और संख्या 6, संख्या 2 से बड़ी है, अर्थात् 6>2 है।

इसी प्रकार संख्या 5, संख्या 4 के दाईं ओर है, अर्थात् 5>4 है।

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष निकलता है कि दो पूर्ण संख्याओं में से वह संख्या बड़ी होती है जो संख्या रेखा पर अन्य संख्या के दाईं ओर स्थित होती है तथा 0 सबसे छोटी पूर्ण संख्या है।

संख्या रेखा पर योग- पूर्ण संख्याओं के योग को संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है।

जैसे- 2 और 3 के योग को देखें।



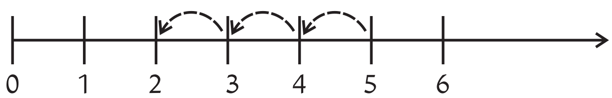
तीर के सिरे पर बिन्दु 2 है। 2 से प्रारम्भ कीजिए। चूँकि हमें इस संख्या में 3 को जोड़ना है, इसलिए हम दाई ओर तीन कदम 2 से 3, 3 से 4 और 4 से 5 चलते हैं। जैसा कि ऊपर दिखाया गया है।

इस प्रकार 2 और 3 का योग 5 है।

संख्या रेखा पर व्यवकलन (घटाना)-

दो पूर्ण संख्याओं के व्यवकलन को भी संख्या रेखापर दर्शाया जा सकता है।

जैसे- 5 में से 3 को घटाना-



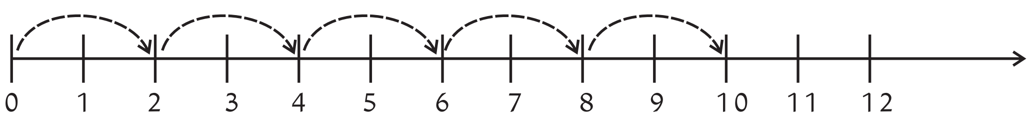
तीर के सिरे पर बिन्दु '5' है। '5' से प्रारम्भ कीजिए। चूँकि 3 को घटाया जाता है। इसलिए बाईं ओर 1 मात्रक वाले तीन कदम चलते है तथा हम बिन्दु '2' पर पहुँचते हैं।

अतः 5 में से 3 को घटाने पर 2 प्राप्त होता है अर्थात् 5 - 3 = 2

संख्या रेखा पर गुणन (गुणा)-

दो पूर्ण संख्या के गुणन को संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है।

जैसे- 2 x 5 का मान ज्ञात करना।



'0' से प्रारम्भ कीजिए और दाईं ओर एक बार में 2 मात्रकों के बराबर के कदम चाहिए। ऐसे **पाँच** कदम चलिए। अब आप यह देख रहे हैं कि बिन्दु '10' पर पहुँचते हैं, अर्थात् 2 x5 = 10

क्रमागत पूर्ण संख्याएं-

ऐसे पूर्ण संख्याएं जिसमें ठीक आगे आने वाली संख्याएं, उस संख्या की उत्तरवर्ती हो, क्रमागत पूर्ण संख्याएं कहलाती है।

जैसे- 15, 16 क्रमागत संख्याएं हैं।

पूर्ण संख्याओं पर संक्रियाओं के प्रगुण-

(A) पूर्ण संख्याओं पर योग के प्रगुण

(i) योग का संवरक प्रगुण- दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव पूर्ण संख्या होती है।

जैसे- $2 + 3 = 5$, एक पूर्ण संख्या है।

(ii) योग का क्रमविनिमेय प्रगुण- दो पूर्ण संख्याओं का योग क्रम बदलने से अपरिवर्तित रहता है।

जैसे- $5 + 7 = 12$

$7 + 5 = 12$

$\therefore\ 5 + 7 = 12 = 7 + 5$

(iii) योग का तत्समक अवयव - किसी पूर्ण संख्या में शून्य को जोड़ने पर संख्या में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

जैसे- $7 + 0 = 7$

इसी कारण शून्य को योग का तत्समक अवयव कहते हैं।

(vi) योग का साहचर्य प्रगुण- इस प्रगुण में तीन संख्याओं के योग में किन्हीं दो संख्याओं का योग पहले निकाल लेने के बाद उसमें तीसरी संख्या का योग करने पर योगफल में कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

यह योग संक्रिया का साहचर्य नियम होता है।

जैसे- $2 + (3 + 4) = 2 + 7 = 9$

$(2 + 3) + 4 = 5 + 4 = 9$

$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4 = 9$

प्रशिक्षुओं को अन्य उदाहरण देकर इस प्रगुण को और अधिक स्पष्ट करवाये।

(B) पूर्ण संख्याओं पर घटाने के प्रगुण

(i) घटाने का संवरक प्रगुण-

देखें- $7 - 4 = 3$, एक पूर्ण संख्या

$4 - 7 = -3$, एक पूर्ण संख्या नहीं

अर्थात् किन्हीं दो पूर्ण संख्याओं का अन्तर सदैव पूर्ण संख्या नहीं होती हैं।

या, घटाने की संक्रिया पूर्ण संख्याओं के लिए संवरक नहीं है।

(ii) घटाने का क्रम-विनिमेय प्रगुण-

देखें- $3 - 5 = -2$

$5 - 3 = 2$

$\therefore\ 3 - 5 = 5 - 3$

अर्थात् घटाने की संक्रिया मे पूर्ण संख्याओं के लिए क्रम-विनिमय नियम लागू नहीं होता है।

(iii) घटाने में शून्य की तत्समकता-

देखें- $5 - 0 = 5$, एक पूर्ण संख्या

$0 - 5 = -5$, एक पूर्ण संख्या नहीं

अर्थात् घटाने की संक्रिया मे पूर्ण संख्याओं के लिए '0' तत्समक अवयव नहीं हैं।

(iv) घटाने की संक्रिया में साहचर्य प्रगुण-

देखें- $(7 - 5) - 3 = 2 - 3 = -1$

$7 - (5 - 3) = 7 - 2 = 5$

$\therefore\ 7 - (5 - 3) \neq (7 - 5) - 3$

अर्थात् घटाने की संक्रिया, पूर्ण संख्याओं के लिए साहचर्य **नहीं** है।

इसका अन्य उदाहरण लेकर प्रशिक्षुओं से चर्चा करें।

(c) पूर्ण संख्या में गुणा के प्रगुण-

(i) गुणन का संवरक प्रगुण-

देखें- $2 \times 5 = 10$

$3 \times 6 = 18$

$7 \times 5 = 35$

यहाँ पर हम देखते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं को आपस में गुणा करने के बाद एक पूर्ण संख्या प्राप्त होता है।

अर्थात् पूर्ण संख्याएं, गुणन के संवरक के नियम का पालन करता है।

(ii) गुणन का क्रम-विनिमेय प्रगुण-

देखें- $2 \times 5 = 5 \times 2 = 10$

$3 \times 6 = 6 \times 3 = 18$

$7 \times 4 = 4 \times 7 = 28$

यहाँ पर हम देखते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं के गुणन का क्रम बदलने से उसके परिणाम में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

अर्थात् पूर्ण संख्याएं, गुणन के क्रम-विनिमेय नियम का पालन करता है।

(iii) शून्य का गुणन प्रगुण-

देखें- $0 \times 0 = 0$

$0 \times 5 = 0$

$0 \times 5320 = 0$

अतः पूर्ण संख्याओं में से किसी भी संख्या में शून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होता है।

(iv) गुणन का तत्समक अवयव-

देखें- $0 \times 1 = 0$

$1 \times 1 = 1$

$5 \times 1 = 5$

$5002 \times 1 = 5002$

अतः पूर्ण संख्याओं में से किसी संख्या में 1 से गुणा करने पर वही संख्या प्राप्त होती है अर्थात् '1' को गुणन का तत्समक अवयव कहते हैं।

(v) गुणन का साहचर्य प्रगुण- किन्हीं तीन पूर्ण संख्याओं के गुणनफल में यदि किन्हीं दो संख्याओं के गुणनफल को अन्य तीसरी संख्या से गुणा किया जाये तो गुणनफल में कोई अंतर नहीं होता है।

जैसे- $(5 \times 3) \times 4 = 5 \times (3 \times 4)$

क्योंकि $(5 \times 3) \times 4 = 15 \times 4$

$= 60$

और $5 \times (3 \times 4) = 5 \times 12$

$= 60$

(vi) गुणन संक्रिया का योग पर वितरण नियम-

देखें- $3 \times (4 + 5) = 3 \times 9$

$= 27$

$3 \times 4 + 3 \times 5 = 12 + 15$

$= 27$

$\therefore \quad 3 \times (4 + 5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$

अतः पूर्णसंख्याओं के लिए गुणन संक्रिया का योग पर वितरण होता हैं।

इस प्रकार का अन्य उदाहरण देकर प्रशिक्षुओ से निष्कर्ष निकलवायें।

(vii) गुणन का घटाने पर वितरण नियम-

देखें- $2 \times (5 - 7) = 2 \times (-2)$

$= -4$

$2 \times 5 - 2 \times 7 = 10 - 14$

$= -4$

$\therefore \quad 2 \times (5 - 7) = 2 \times 5 - 2 \times 7$

अत; पूर्ण संख्याओं के लिए, गुणन संक्रिया का घटाने पर वितरण होता है।

(D) पूर्ण संख्याओं में भाग की संक्रिया-

(i) भाग की संक्रिया में संवरक प्रगुण-

पूर्ण संख्याओ के युग्म (5, 6), (2, 5), (0, 5) और (5, 8) को लें।

हम देखते हैं कि प्रत्येक दशा में प्रथम पूर्ण संख्या में दूसरी पूर्ण संख्या से भाग देने पर **हमेशा** पूर्ण संख्या **नहीं** प्राप्त होता है।

अतः पूर्ण संख्याओं के लिए भाग की संक्रिया, संवरक नहीं है।

(ii) शून्य से पूर्ण संख्याओं में भाग-

देखें-

प्रशिक्षुओं से चर्चा करें कि 6 को 0 से भाग देने पर भागफल क्या होगा ?

निष्कर्ष - किसी पूर्ण संख्या में शून्यसे भाग देने पर परिभाषित नहीं है।

(iii) पूर्ण संख्याओं में '1' से भाग

देखें- $5 \div 1 = 5$

$8 \div 1 = 8$

$1000 \div 1 = 1000$

$0 \div 1 = 0$

किसी पूर्ण संख्या में '1' से भाग देने पर भागफल वही संख्या प्राप्त होता है।

(iv) शून्य में किसी शून्येतर पूर्ण संख्या से भाग-

देखें- $0 \div 5 = 0$

$0 \div 6 = 0$

$0 \div 10002 = 0$

किसी शून्येतर पूर्ण संख्या का भाग शून्य में देने पर भागफल शून्य प्राप्त होता है।

(v) किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी शून्येतर पूर्ण संख्या का भाग देना-

देखें- $5002 \div 5002 = 1$

$5 \div 5 = 1$

$75 \div 75 = 1$

किसी शून्येतर पूर्ण संख्या में उसी शून्येतर पूर्ण संख्या का भाग देने पर भागफल 1 प्राप्त होता है। (शून्येतर का अर्थ है शून्य के अलावा)। प्रशिक्षुओं से अन्य उदाहरण देकर उसकी चर्चा करें।

मूल्यांकन -

1. संख्याओं 20, 100001, 5000, 700 की क्रमागत संख्या बताइये।

2. निम्नलिखित प्रश्न में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए-

   (i) 0 + 5 = ...

   (ii) 0 + 0 = ...

   (iii) 750 + 895 = 895 + ...

   (iv) 90535 x 1 = ...

   (v) $0 \div 20050$ = ...

3. क्या a - (b - c) = (a - b) - c; जहाँ पर a, b, c पूर्ण संख्याएं है, सम्बन्ध सदैव सत्य होता है ?

4. क्या दो विभिन्न शून्येतर पूर्ण संख्याओं a तथा b के लिए-

   $a \div b + b = a$ सम्भव है ?

5. संख्या 504099 की परवर्ती संख्या है-

   (1) 504101 (2) 504100 (3)504098 (4) 504010

6. संख्या 78950 की पूर्ववर्ती संख्या है-

   (1) 78951 (2) 78949 (3) 78915 (4) 78849

7. निम्नांकित संख्याओं में से पूर्ण संख्या है-

   (1) 2 (2) 10 (3) 50 (4) उपर्युक्त सभी

8. योग का तत्समक अवयव है-

   (1) 1 (2) -1 (3) 5 (4) 0

9. यदि 3 + 3 = 6 है, तो निम्नांकित में से किस नियम का पालन करते हैं-

   1. योग का संवरक प्रगुण

   2. योग का क्रम विनिमेय प्रगुण

3. योग का साहचर्य प्रगुण

4. इनमें से कोई नहीं

10. 3 x (4 +5) का मान बराबर है-

(1) 3 x 4 + 5

(2) 3 x 4 + 3 x 5

(3) 3+ 4 x 5

(4) 4 x 3 x 5

इकाई - 5

पूर्णांक तथा परिमेय संख्याओं पर गणितीय संक्रियाएं तथा इनके प्रतिलोम तथा तत्समक (योगात्मक तथा गुणात्मक)

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी होगी-

- पूर्णांक
- संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरुपण
- पूर्णांकों में क्रमबद्धता
- पूर्णांकों का योग, घटाना, गुणा एवं भाग करना।
- परिमेय संख्याओं का योग, घटाना, गुणा एवं भाग करना।

जैसा कि हम संख्याओं में प्राकृतिक संख्या, पूर्ण संख्या का अध्ययन कर चुके हैं। पूर्णांकों व परिमेय संख्या पर गणितीय संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

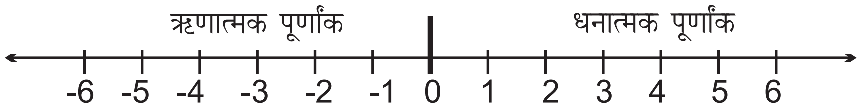
पूर्णांक-

सर्वप्रथम ज्ञात की गई संख्याएँ, प्राकृतिक संख्याएँ अर्थात् 1,2,3,4..........हैं। यदि हम प्राकृतिक संख्याओं के संग्रह में शून्य को सम्मिलित करें, तो हमें पूर्ण संख्याएँ प्राप्त होंगी। इन संख्याओं में ऋणात्मक संख्याओं अर्थात् -1, -2, -3, -4,.............को मिलाने पर संख्याओं के इस समूह को पूर्णांक कहते हैं।

इस संग्रह में 1,2,3..........धनात्मक पूर्णांक कहलाते हैं जबकि -1,-2,-3,...........ऋणात्मक पूर्णांक कहलाते हैं।

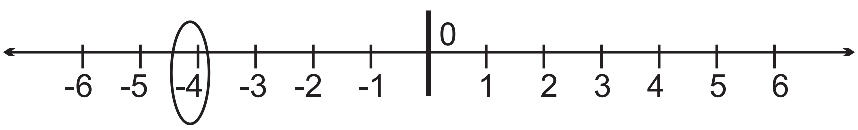
प्रशिक्षुओं से अन्य उदाहरण देकर इसे और स्पष्ट करायें।

संख्या रेखा पर पूर्णांकों का निरुपण-



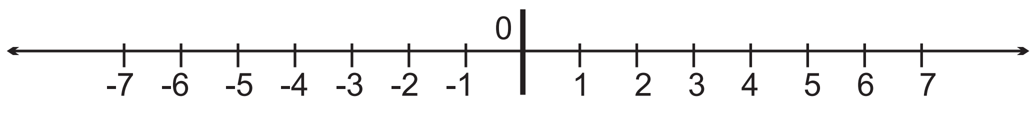
एक रेखा खींचिए और उस पर समान दूरी पर कुछ बिन्दु अंकित कीजिए, जैसा कि ऊपर के चित्र में दिखाया गया है।

इस संख्या पर -4 अंकित करने के लिए, हम शून्य के बाईं ओर चार कदम चलते हैं।



प्रशिक्षुओं से अन्य प्रश्न को पूॅछकर उसे हल करवायें।

पूर्णांकों में क्रमबद्धता-



हम जानते हैं कि 5>2 होता है और ऊपर खींची गई संख्या रेखा में देखते हैं कि संख्या 5, संख्या 2 के दाईं और स्थित है।

इसी प्रकार, 4>0 और संख्या 4, संख्या 0 के दाईं ओर स्थित हैं।

अब चूँकि संख्या 0, संख्या -5 के दाईं ओर स्थित है, इसलिए 0 > -5 है।

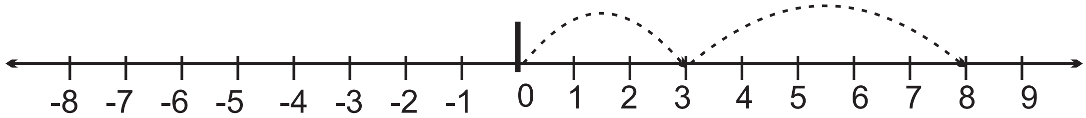
पुनः संख्या -2, संख्या -7 के दाईं ओर स्थित है, अतः -2 > -7 है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर दाईं ओर चलने पर संख्या का मान बढ़ता है और बाईं ओर चलने पर संख्या का मान घटता है।

अतः -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < 4 इत्यादि हैं।

(A) संख्या रेखा पर पूर्णांकों का जोड़ना (योग):-

(i) संख्या रेखा पर प्रशिक्षुओं से 3 और 5 से जोड़ना इस प्रकार बतायें।

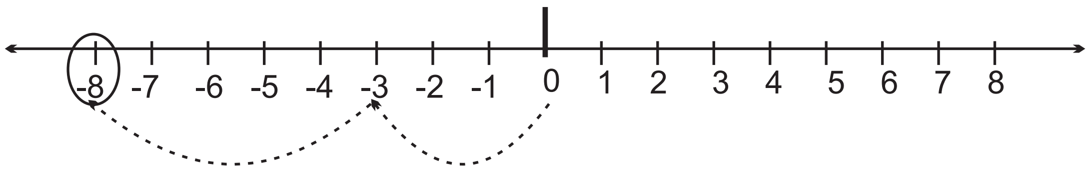


संख्या रेखा पर पहले हम 0 से प्रारम्भ करके दाईं ओर 3 कदम चलते हैं और 3 पर पहुँचते हैं।

फिर हम 3 के दाई ओर 5 कदम चलते हैं और 8 पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार, 3 + 5 = 8 प्राप्त होता है

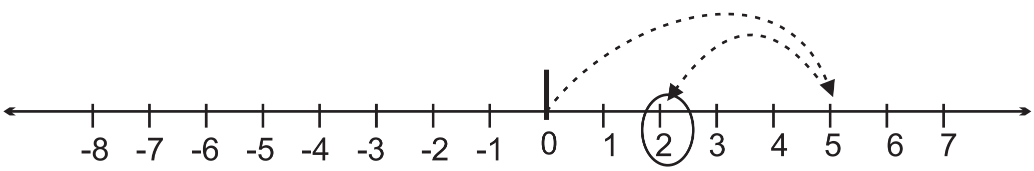
(ii) आइए संख्या रेखा पर -3 और -5 को जोड़ेः



संख्या रेखा पर, पहले हम 0 से प्रारंभ करके बाईं ओर तीन कदम चलने पर -3 पर पहुँचते हैं। अब संख्या -3 के बाईं ओर पाँच कदम चलते हैं और -8 पर पहुँचते हैं।

इस प्रकार (-3) + (-5) = -8 प्राप्त होता है।

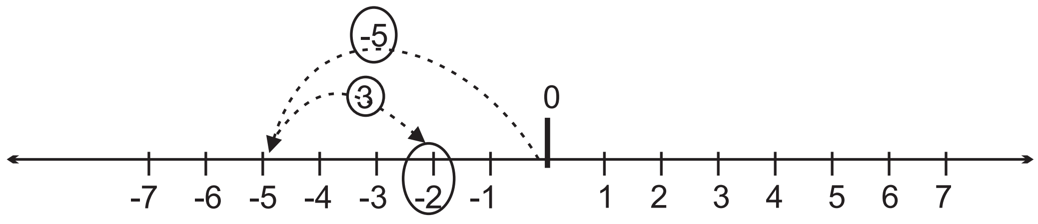
(iii) आइए संख्या रेखा पर (+5) और (-3) का योग प्राप्त करते हैं।



हम संख्या रेखा पर 0 से प्रारंभ करके दाईं ओर पाँच कदम चलते हैं और बिन्दु 5 पर पहुँचते हैं। फिर हम बिन्दु '5' के बाईं ओर 3 कदम चलकर बिन्दु '2' पर पहुँचते हैं।

अर्थात् , $(+5) + (-3) = 2$

(iv) आइए, संख्या रेखा पर (-5) और $(+3)$ का योग प्राप्त करते हैं।



पहले हम 0 से प्रारंभ करके, 0 के बाईं ओर 5 कदम चलते हैं और -5 पर पहुँचते हैं। फिर हम -5 के दाईं ओर 3 कदम चलते हैं और -2 पर पहुँचते हैं। अतः

$(-5) + (+3) = -2$

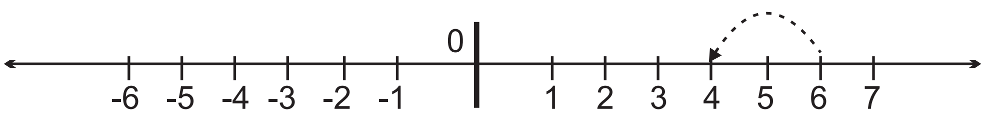
योज्य प्रतिलोम-

आइए 3 और -3 को जोड़ें।

अब हम 0 से प्रारंभ करके, 0 के दाईं ओर 3 कदम चलकर 3 पर पहुँचते हैं, फिर हम 3 के बाईं ओर 3 कदम चलकर 0 पर पहुँचते हैं। अतः 3 और -3 को जोड़ने पर 0 प्राप्त होगा। इसी प्रकार हम $(+5)$ और (-5) को जोड़ने पर 0 प्राप्त होगा। ऐसी संख्याएँ एक दूसरे के योज्य प्रतिलोम (Additive Inverse) कहलाती हैं।

संख्या रेखा की सहायता से पूर्णांकों का व्यवकलन (घटाना)-

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए, संख्या रेखा पर 6 में से 2 को घटाने पर 4 कैसे प्राप्त होता हैं।



अर्थात् $6 - 2 = 4$

आइऐ अब, $6 - (-2)$ का मान ज्ञात करें। यदि हम संख्या रेखा पर 6 से बाईं ओर 2 कदम चले तो 4 प्राप्त होगा।

तब $6 - (-2) = 4$ लेकिन यह सही नहीं है

क्योंकि $6 - 2 = 4$

तथा $6 - 2 \neq 6 - (-2)$ है।

अतः हमें दाईं ओर चलना होगा।

अर्थात् $6 - (-2) = 8$

अतः हम कह सकते हैं कि यदि किसी पूर्णांक से एक ऋणात्मक पूर्णांक घटाते हैं, तो हम अब पहले से बड़ा पूर्णांक प्राप्त होता है।

अब हमें ऐसा प्रतीत होता है कि 6 में -2 के योज्य प्रतिलोम जोड़ने का अर्थ वही है, जो 6 में से (-2) को घटाने का है।

अर्थात् $6 - (-2) = 6 + 2$

पूर्णांकों का गुणन-

एक धनात्मक और एक ऋणात्मक पूर्णांक का गुणन-

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं का गुणन बार-बार योग है।

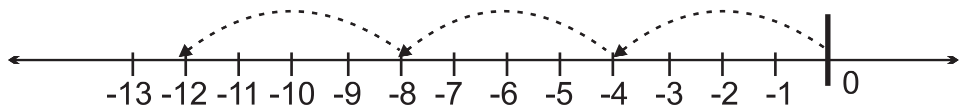
जैसे :- $5+5+5+5 = 5\times4=20$

क्या पूर्णांकों के योग को भी इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है?

आइये, देखें :

$(-4) + (-4) + (-4) = -12$ है।

अब इसको संख्या रेखा पर इस प्रकार निरूपित करते हैं।



उपर्युक्त को हम इस प्रकार लिख सकते हैंः

$(-4)+(-4)+(-4) = 3\times(-4)$

$3\times(-4) = -12$

इसी प्रकार

$(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3) = 6 \times (-3)$

$= -18$

दूसरी विधि से $3\times(-4)$ को ज्ञात कर सकते हैं।

सर्वप्रथम 3×4 को ज्ञात कीजिए और प्राप्त गुणनफल से पहले ऋण (-) का चिह्न लगायें।

अतः $3\times(-4) = -(3\times4) = -12$

इसी प्रकार $7\times(-9)$, $8\times(-7)$, $9\times(-15)$ का मान ज्ञात कर सकते हैं।

आइये अब (ऋणात्मक पूर्णांक) × (धनात्मक पूर्णांक) को इस पैटर्न पर लिखिए।

जैसे : $(-2) \times 5$ का मान ज्ञात करना है।

हम पाते हैं,

$2\times5 = 10$

$1\times5 = 5 = 10-5$

$0 \times5 = 0 = 5-5$

$-1\times5 = 0-5 = -5$

$-2\times5 = -5-5 = -10$

अतः $-2\times5 = -10$

$(-2)\times5 = -10 = 2\times(-5)$

अब अन्य उदाहरण लेकर इसे और स्पष्ट कर सकते हैं।

दो ऋणात्मक पूर्णांकों का गुणनः

क्या आप $(-2)\times(-3)$ का गुणनफल बता सकते हैं?

देखें; $(-2)\times 4 = -8$

$(-2)\times 3 = -6 = -8-(-2)$

$(-2)\times 2 = -4 = -6-(-2)$

$(-2)\times 1 = -2 = -4-(-2)$

$(-2)\times 0 = 0 = (-2)-(-2)$

$(-2)\times -1 = 0-(-2) = 2$

$(-2)\times(-2) = 2-(-2) = 4$

$(-2)\times(-3) = 4-(-2) = 6$

इस प्रकार अन्य उदाहरण लेकर उपर्युक्त प्रक्रिया को और अधिक स्पष्ट कर सकते हैं।

गुणात्मक तत्समक-

हम जानते हैं कि पूर्ण संख्याओं के लिए 1 गुणात्मक तत्समक अवयव (Multiplicative identity) है।

अधोलिखित पर प्रशिक्षु विचार करें-

$(-3)\times 1 = -3$	$1\times 6 = 6$
$(-4)\times 1 = -$........	$1\times 9 = -$........
$1\times(-5) = -$........	$1\times 11 = -$........
$1\times(-6) = -$........	$9\times 1 = -$........

उपर्युक्त से यह स्पष्ट है कि 1 पूर्णांकों के लिए गुणात्मक तत्समक अवयव है।

व्यापक रूप में किसी पूर्णांक a के लिए,

$a\times 1 = 1\times a = a$

अतः 1 पूर्णांकों के लिए एक गुणात्मक तत्समक अवयव है।

पूर्णांकों का विभाजनः

निम्नांकित तालिका को अवलोकित करें।

गुणन कथन	संगत भाग कथन
$2\times(-5) = -10$	$(-10)\div(-5) = 2$
	$(-10)\div 2 = -5$
$(-3)\times 6 = -18$	$(-18)\div(-3) = 6$
	$(-18)\div 6 = (-3)$
$(-7)\times 5 =$	$(-35)\div$ .... $= 5$

उपर्युक्त से हम देखते हैं कि-

$(-10) \div 2 = -5$

$(-18) \div 6 = -3$

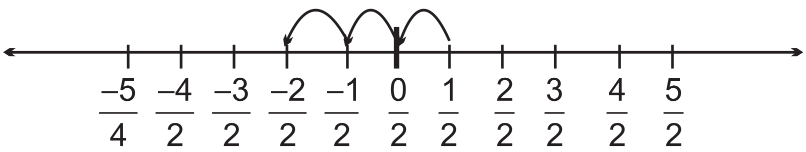
जब हम एक ऋणात्मक पूर्णांक को धनात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो हम पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल से पूर्व ऋण चिह्न (-) रख देते हैं।

अब $36 \div (-4) = -9$ और $(35) \div (-5) = -7$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि जब हम एक धनात्मक पूर्णांक को एक ऋणात्मक पूर्णांक से भाग देते हैं, तो सर्वप्रथम हम उन्हें पूर्ण संख्याओं के रूप में भाग देते हैं और उसके पश्चात् भागफल के सामने ऋण चिह्न (-) रख देते हैं।

परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ:-

योग- आइये समान हर वाले दो परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$ और $-\frac{3}{2}$ को जोड़ें।



दो क्रमागत बिन्दुओं के बीच की दूरी $\frac{1}{2}$ है। अतः $\frac{1}{2}$ और $-\frac{3}{2}$ का जोड़ने का अर्थ है कि $\frac{1}{2}$ के बायीं ओर तीन कदम चलें और हम $\frac{-2}{2} = -1$ के स्थान पर पहुँचते हैं।

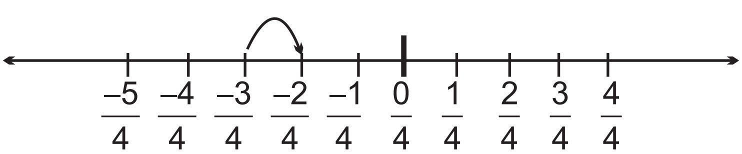
अर्थात् $\frac{1}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = -1$

इसको इस प्रकार भी हल कर सकते हैं:-

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

इसी प्रकार अन्य उदाहरण देकर इसको और स्पष्ट करें:-

इसी प्रकार $\frac{-3}{4} + \frac{1}{4}$ निम्नलिखित होगा-



हमें क्या प्राप्त होता है?

साथ ही $$\frac{-3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{-3+1}{4}=\frac{-2}{4}$$

योज्य प्रतिलोम-

हम जानते हैं कि पूर्णांकों में, -3 का योज्य प्रतिलोम (Additive inverse) 3 है, 3 पूर्णांक -3 का योज्य प्रतिलोम होता है।

परिमेय संख्याओं के लिए-

$$\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$$

$\frac{3}{4}$ का योज्य प्रतिलोम $-\frac{3}{4}$ होगा।

व्यकलन (घटाना)

रमेश दो परिमेय संख्याओं $\frac{2}{3}$ और $\frac{3}{5}$ का अंतर इस प्रकार निकालता है;

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{10-9}{15}=\frac{1}{15}$$

रीता जानती है कि दो पूर्णांक a और b के लिये, a-b = a+(-b) लिखा जा सकता है। उसने ऐसा परिमेय संख्याओं के लिये भी किया और $\frac{2}{3}-\frac{3}{5}=\frac{2}{3}+\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{10+(-9)}{15}=\frac{1}{15}$ प्राप्त होता है।

अतः दोनों विधियों सेएक समान ही अंतर प्राप्त किया।

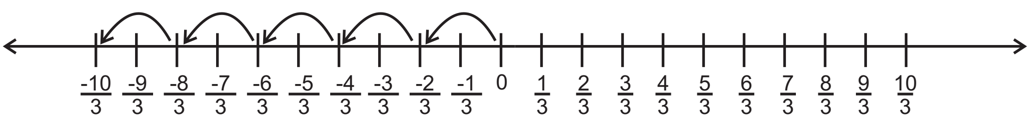
अतः हम कह सकते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को घटाते (व्यवकलन) समय, घटाए जाने वाली संख्या के योज्य प्रतिलोम को अन्य परिमेय संख्याओं में जोड़ देना चाहिए।

इस प्रकार, $$2\frac{3}{5}-3\frac{4}{7}=\frac{13}{5}-\frac{25}{7}$$
$$=\frac{91+(-125)}{35}$$
$$=-\frac{34}{35}$$

गुणन-

परिमेय संख्या $-\frac{2}{3}$ को 5 से गुणा करें, अर्थात् हम $-\frac{2}{3}x5$ ज्ञात करें।

संख्या रेखा पर इसका अर्थ होगा कि शून्य से बाईं ओर $\frac{2}{3}$ के बराबर पाँच कदम चलना।



अर्थात् $-\frac{2}{3} x 5 = -\frac{10}{3}$

दूसरी विधि का प्रयोग करने पर इसका हल इस प्रकार है-

$$-\frac{2}{3} x 5 = \frac{-2x5}{3} = -\frac{10}{3}$$

हम उसी परिमेय संख्या पर पहुँचते हैं।

अन्य उदाहरण लेकर इसको और स्पष्ट करें। गुणात्मक प्रतिलोम की चर्चा करके बतायें कि किसी संख्या को उसके गुणात्मक प्रतिलोम से गुणा करने पर 1 प्राप्त होता है। जैसे 5 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{5}$ तथा -5 का गुणात्मक प्रतिलोम - $\frac{1}{5}$ है। इस प्रकार परिमेय संख्या - $\frac{1}{5}$ संख्या (-5) का व्युत्क्रम या संख्या 5 परिमेय संख्या $\frac{1}{5}$ का व्युत्क्रम है। इसी प्रकार - $\frac{1}{5}$ तथा -5 भी एक-दूसरे के व्युत्क्रम है।

विभाजन-

परिमेय संख्या का उसके व्युत्क्रम से गुणनफल सदैव 1 होता है।

उदाहरण- $-\frac{3}{4} x \left(-\frac{3}{4} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

$$= -\frac{3}{4} x - \frac{4}{3} = 1$$

इसी प्रकार $\left(-\frac{7}{9}\right) x \left(-\frac{9}{7}\right) = 1$

विजय ने एक परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ को अन्य परिमेय संख्या $-\frac{3}{5}$ से इस प्रकार विभाजित किया

$$\frac{2}{3} \div \left(\frac{-3}{5}\right) = \frac{2}{3} x \frac{5}{(-3)} = \frac{10}{-9} = \frac{-10}{9}$$

अतः एक परिमेय संख्या को किसी अन्य परिमेय संख्या से भाग देने का अर्थ है कि हम उस परिमेय संख्या को अन्य परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा कर देते हैं।

क्रिया कलाप-

क्या पूर्णांकों तथा परिमेय संख्याओं पर गणितीय संक्रियाओं के प्रगुण सत्य हैं?

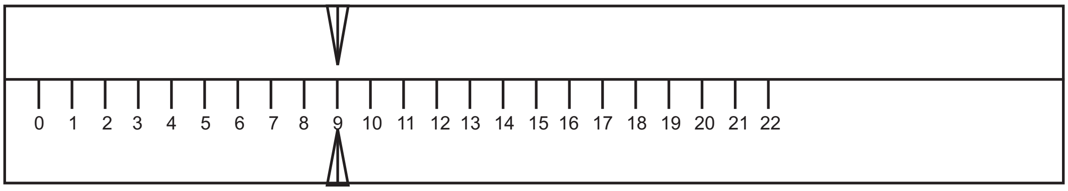
प्रशिक्षक प्रगुणों की सत्यता की जाँच प्रशिक्षुओं से विभिन्न उदाहरणों द्वारा करवायें।

शिक्षक प्रशिक्षुओं से निम्नांकित क्रिया कलाप करवायें-

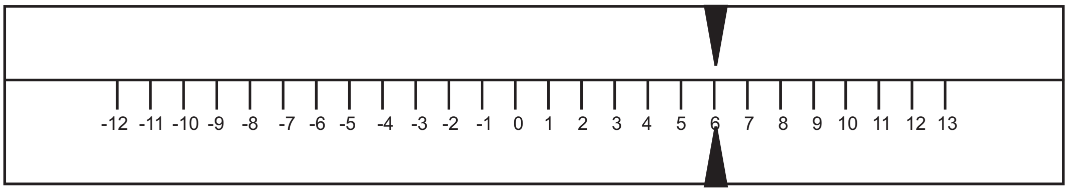
गत्ता, थर्माकोल, ग्रीटिंग कार्ड अथवा लकड़ी की आयताकार पटरी बनवाइए।

अब पटरी पर चित्रानुसार चिन्हों को अंकित कर उस पर एक सरकने वाला संकेतांक लगवायें तथा प्रशिक्षु से पूर्व संख्याओं, पूर्णांकों तथा परिमेय संख्याओं पर जोड़, घटाना एवं गुणा की संक्रियाओं का अभ्यास करवायें एवं उत्तर की पुष्टि करवायें।

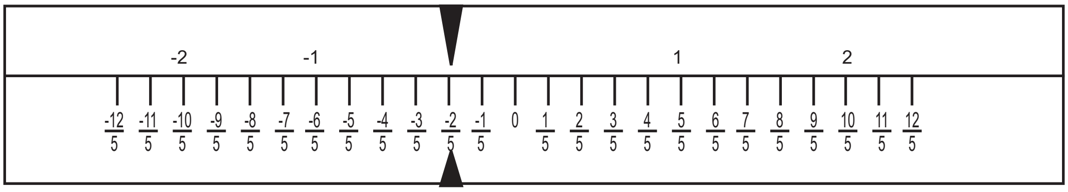
(1)



(2)



(3)



मूल्यांकन-

(1) निम्नांकित प्रश्नों को हल कीजिए:

(i) (-250) + (+150)

(ii) 11 + (-7)

(iii) (-380) + (-270)

(iv) (-7) + (-9) + 4 + 16

(v) 37 + (-2) + (-65) + (-18)

(2) निम्नांकित प्रश्नों को हल कीजिए :

(i) 35 - 20 (ii) 72 - (-90)

(iii) (-20) + (-13) (iv) (-7) - 8 - (25)

(3) निम्नांकित प्रश्न का मान बताइए:

(i) 15 x (-18) (ii) -55 x 15

(iii) (-20) x (-10) (iv) 10 x 105

(4) निम्नांकित प्रश्नों का मान बताइए-

(i) (-30) ÷ 10 (ii) 50 ÷ (-5)

(iii) (-36) ÷ (-9) (iv) 0 ÷ (-12)

(5) निम्नांकित प्रश्नों का मान बताइए-

(i) $-\frac{13}{7}+\frac{6}{7}$ (ii) $\frac{19}{5}+\frac{-7}{5}$

(iii) $\frac{3}{7}-\frac{5}{9}$ (iv) $3\frac{1}{2}-\frac{(-2)}{3}$

(6) परिमेय संख्या $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ के मध्य चार परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

(संकेत : पहली परिमेय संख्या $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=\frac{3}{12}$

दूसरी परिमेय संख्या $=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{12}+\frac{1}{3}\right)=\frac{7}{24}$

इसी प्रकार अन्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करो।

(7) सत्य कथन के सामने (√) तथा असत्य कथने के आगे (×) लगाइये-

(i) $\frac{2}{5}$ और $\frac{3}{5}$ के ठीक मध्य की परिमेय संख्या $\frac{7}{10}$ है।

(ii) 0 और 1 के ठीक मध्य की परिमेय संख्या $\frac{1}{2}$ है।

(iii) $-\frac{2}{3}$ और $\frac{2}{9}$ के बीच एक परिमेय संख्या $\frac{1}{9}$ है।

(iv) किन्हीं दो विभिन्न परिमेय संख्याओं के मध्य अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

(8) -1 और $-\frac{1}{2}$ के ठीक बीच की परिमेय संख्या है-

(i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$

(iii) $-\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{3}{4}$

(9) संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं 3 और 4 के बीच की दो तिहाई दूरी पर स्थित परिमेय संख्या है-

(i) $\frac{5}{2}$ (ii) $\frac{13}{3}$

(iii) $-\frac{11}{3}$ (iv) $\frac{11}{3}$

(10) -1 और 1 के ठीक बीच की परिमेय संख्या है-

(i) -2 (ii) 2

(iii) 0 (iv) $\frac{1}{2}$

(11) $1\frac{3}{4}$ से $1\frac{3}{4}$ और $4\frac{3}{8}$ के मध्य एक सातवीं दूरी पर स्थित परिमेय संख्या है-

(i) $3\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$

(iii) $1\frac{1}{8}$ (iv) $2\frac{1}{8}$

(संकेत : अभीष्ट संख्या होगी $1\frac{3}{4}+\frac{1}{7}\left(4\frac{3}{8}-1\frac{3}{4}\right)$

(12) संख्या $\left(-\frac{19}{29}\right)$ का गुणनात्मक प्रतिलोम है-

(i) $\frac{19}{29}$ (ii) 0

(iii) 1 (iv) $-\frac{29}{19}$

(13) संख्या $\frac{30}{278}$ का योज्य प्रतिलोम है-

(i) $\frac{278}{30}$ (ii) $-\frac{30}{270}$

(iii) $-\frac{30}{278}$ (iv) 1

इकाई - 6
समीकरण तथा सर्वसमिका का अर्थ

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी होगी-

(1) समीकरण का अर्थ

(2) समीकरण बनाना तथा हल करना

(3) सर्वसमिका का अर्थ

(4) समीकरण तथा सर्वसमिका में अन्तर

शिक्षक प्रशिक्षुओं को अवगत करायें कि वह दैनिक जीवन में कई प्रकार के वाक्य बोलते हैं। जैसे-

(1) आज रात में वर्षा होगी।

(2) लखनऊ उत्तर प्रदेश की राजधानी है।

(3) संख्या 10 संख्या 15 से बड़ी है।

(4) रविवार के बाद सोमवार आयेगा।

(5) कल के मैच में भारत जीतेगा।

इन वाक्यों में से प्रथम व पंचम वाक्य के सत्य अथवा असत्य होने की बात निश्चित रूप से नहीं कही जा सकती है, जबकि वाक्य 2,3 और 4 का सत्य या असत्य होना निश्चित है।

ऐसे वाक्य जिनका सत्य या असत्य होना सुनिश्चित हो, कथन कहलाता है।

अब निम्नलिखित कथनों पर विचार करें जो मूलभूत संक्रियाओं पर आधारित है-

(1) $6 + 6 = 12$	(सत्य)
(2) $3 < 1$	(असत्य)
(3) $5 > 6$	(असत्य)
(4) $x + 5 = 7$	(ज्ञात नहीं)
(5) $x^2 = 9$	(ज्ञात नहीं)

कथन 1, 2, 3 ऐसे कथन हैं, जिसमें अक्षर संख्या नहीं है। कथन 4 और 5 में अक्षर संख्या x सम्मिलित है। इन कथनों की सत्यता x के मान पर निर्भर करती है। कथन 4, x के मान 2 के लिए ही सत्य है। शेष सभी मानों के लिए असत्य हैं। कथन 5, x के मान ± 3 के लिए सत्य है। पुनः कथन 1, 4, 5 पर विचार कीजिए-

$6 + 6 = 12$ ....(1)

$x + 5 = 7$ ....(2)

$x^2 = 9$ ....(3)

इन सभी कथनों में समानता सूचक चिन्ह '=' का प्रयोग किया गया है। अतः ये सभी कथन समानता सूचक कथन कहलाते हैं

क्रिया कलाप-

शिक्षक प्रशिक्षुओं से क्रियाकलाप करवायें। माचिस की तीलियों को उन्हें देकर उनसे V तथा N के प्रतिरूप बनवाकर निम्नांकित सारणी को भरने के लिए आदेशित करें।

क्र.सं.	V के प्रतिरूप की संख्या	तीलियों की संख्या
1. 2. 3. 4.	1 2 3 : n	2 2 x 2 : : -

क्र.सं.	N के प्रतिरूप	तीलियों की संख्या की संख्या
1. 2. 3. 4.	1 2 3 4 n	3 3 x 2 : : -

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि V तथा N के n प्रतिरूप के लिए क्रमशः आवश्यक तीलियों की संख्या 2n तथा 3n होगी। यहाँ पर तीलियों की संख्या n के मान पर निर्भर करती है।

चर और अचर-

प्रशिक्षुओं को चर और अचर से परिचित कराने से पूर्व नीचे बनी तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति करवायें।

(1) वृत्त का व्यास d = 2 × त्रिज्या (r)

तालिका - 1

r (सेमी)	2r (सेमी में)	d (सेमी में)
1	2 x 1	2
4	-----	--
6	---	- -
:	:	:
:	:	:
12	---	---

(2) एक कार 40 किमी/घण्टा की चाल से जा रही है। कार द्वारा चली गई दूरी, चाल एवं समय में संबंध इस प्रकार है-

दूरी (s)= चाल × समय = 40 × t

तालिका- 2

समय t (घंटे में)	चाल × समय 40 × t	दूरी s (किमी. में)
1	40 x 1	40
2	40 x 2	80
3	--	--
6	--	--
8	--	--

उपर्युक्त दोनों तालिकाओं से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं? दोनों तालिकाओं को देखने से स्पष्ट है कि कुछ राशियों का मान विभिन्न परिस्थितियों में बदलता रहता है और कुछ का मान परिस्थिति के अनुसार नहीं बदलता हैं।

अतः

जिनका मान परिस्थिति के अनुसार बदलता है वह चर तथा जिनका मान नहीं बदलता है वह अचर कहलाती है।

तालिका-1 में r तथा d चर है तथा 2 अचर है। इसी प्रकार तालिका-2 में t और s चर है तथा 40 अचर है।

चर को दर्शाने के लिए l, m, n, x, y, z, ... इत्यादि अक्षरों को प्रयोग करते हैं।

समीकरण का अर्थ-

शिक्षक प्रशिक्षुओं से चर्चा करें कि उपर्युक्त क्रियाकलाप में प्रशिक्षुओं ने तीलियों से V का प्रतिरूप बनाने के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या तथा V के प्रतिरूप संख्या में एक सम्बन्ध स्थापित किया था। V प्रतिरूप के लिए आवश्यक तीलियों की संख्या =2n हैं। अब यदि आपको 8 तीलियाँ दी गई हों तो V के कितने प्रतिरूप बनेंगे? इस स्थिति में 2n = 8, यह एक ऐसा प्रतिबन्ध है जो चर n द्वारा संतुष्ट होना चाहिए।

n का मान	**2n का मान**	**प्रतिबन्ध संतुष्ट है या नहीं**
1.	2	नही
2.	4	नही
3.	6	नही
4.	8	हाँ
5	10	नही

इस प्रकार आप देखते हैं कि उपर्युक्त प्रतिबन्ध 2n = 8 केवल के लिए n = 4 के संतुष्ट होता है। 4 के अतिरिक्त अन्य किसी मान के लिए प्रतिबन्ध संतुष्ट नहीं होता है। अतः ऐसे प्रतिबन्ध को जो किसी चर के निश्चित मान के लिए संतुष्ट होता है, समीकरण कहलाता है।

निष्कर्ष-

एक समीकरण समता सूचक चिन्ह युक्त बीजीय व्यंजक पर एक प्रतिबन्ध है, जिसमें चर के किसी विशिष्ट मान के लिए व्यंजक (समिका) के दोनों पक्षों का मान समान होता है। चर का यह विशिष्ट मान समीकरण का हल कहलाता है। समीकरण का समता सूचक चिह्न यह दर्शाता है कि समीकरण के चर के विशिष्ट मान के लिए इस समता चिह्न के बायीं ओर के व्यंजक का मान और चिह्न के दायीं ओर के व्यंजक का मान परस्पर बराबर है। यदि बाँया पक्ष और दाँया पक्ष के बीच में समता चिन्ह के अतिरिक्त कोई अन्य चिन्ह हो, तो वह एक समीकरण नहीं है। जैसे-

$7x + 8 > 20$ (समीकरण नहीं है)

$4x + 5 = 17$ (समीकरण है)

$2x + 3 < 8$ (समीकरण नहीं है)

समीकरण बनाना तथा हल करना-

शिक्षक प्रशिक्षुओं को समीकरण से अवगत करा चुके हैं। अब प्रशिक्षुओं से यह चर्चा करें कि दिये गये कथनों के आधार पर समीकरण बनाने की प्रक्रिया कैसे होगी? शिक्षक प्रशिक्षुओं से वार्तालाप करें कि यदि आपने अपने भाई को कुछ रुपये दिये तथा आपकी माँ ने भी आपके भाई को ` 50 दिये। दोनों रुपयों को मिलाकर उसके पास कुल 200 रुपये हो गये। आपने अपने भाई को कितने रुपये दिये? समीकरण बनाकर स्पष्ट कीजिए।

चूँकि आपने अपने भाई को कुछ रुपये दिये तथा आपकी माँ ने उसे 50 ` दिया। दोनों की मिलाकर कुल रुपये 200 हुए। मान

लीजिए कि आपने अपने भाई को x रुपये दिये। अतः आपके भाई के पास ₹ इस प्रकार होंगे-

आपके द्वारा दिया गया ₹ + माँ के द्वारा दिया गया ₹ = 200

$$x + 50 = 200$$

$$\therefore \quad x = 200 - 50 = 150$$

$x + 50 = 200$ एक समीकरण है जिसमें चर x का मान ($x =$ ₹ 150) इस समीकरण का हल है। क्योंकि x का मान 150 रखते पर समीकरण का बाँया पक्ष दाँये पक्ष के बराबर होता है। अर्थात् समीकरण संतुष्ट हो जाता है। 150 को समीकरण का मूल भी कहते हैं।

वह संख्या जो चर के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर समीकरण को संतुष्ट कर देती है, उस समीकरण का हल (मूल) कहलाती है।

प्रयास कीजिए-

निम्नलिखित गणितीय कथन को बीजीय व्यंजक के रूप में लिखिए, तथा जाँच कीजिए कि यह समीकरण है अथवा नहीं।

1. किसी संख्या में 8 जोड़ा जाय तो 13 प्राप्त होता है।
2. किसी संख्या के 6 गुने से 5 घटाएँ तो 25 प्राप्त होता है।
3. किसी संख्या के एक तिहाई में 7 जोड़ा जाय तो 15 प्राप्त होता है।

ध्यान दें-किसी समीकरण में बायें और दायें पक्षों में से कम से कम किसी एक पक्ष को चर से युक्त व्यंजक अवश्य होना चाहिए अन्यथा यह समीकरण नहीं होगा। बल्कि एक अंकगणितीय समिका होगी।

सर्वसमिका का अर्थ-

शिक्षक प्रशिक्षुओं से यह चर्चा कर चुके हैं कि बीजीय व्यंजक पर ऐसा प्रतिबन्ध जो चर के किसी विशिष्ट मान के लिए संतुष्ट होता है, समीकरण कहलाता है। प्रशिक्षुओं को आदेशित करें कि वह सोच कर बताए कि क्या कोई ऐसा प्रतिबन्ध हो सकता है जो चर के किसी विशिष्ट मान के लिए या सभी मानों के लिए संतुष्ट होता है?

प्रशिक्षुओं से बीजीय कथन $x(2x+5)=2x^2+5x$ का x के मान -1, -2, 0, 1, 2 तथा 3 के लिए सत्यता की जाँच सारणी बनवाकर करवायें।

सत्यता की जाँच - कथन $x(2x+5)= 2x^2+5x$

क्रम. संख्या	x	बाँया पक्ष $x(2x+5)$	दाँया पक्ष $2x^2+5x$
1	-2	-2	-2
2	-1	-3	-3
3	0	0	0
4	1	7	7
5	2	18	18
6	3	33	33

उपरोक्त सारणी से स्पष्ट है कि x के प्रत्येक मान के लिए बाँया पक्ष, दायें पक्ष के बराबर है।

अतः ऐसा समानता सूचक बीजीय कथन जो चर के प्रत्येक मान के लिए सत्य होता है; सर्वसमिका कहलाती है।

इस प्रकार आप देखते हैं कि कथन $x(2x+5)=2x^2+5x$ एक सर्वसमिका है।

समीकरण तथा सर्वसमिका में अन्तर-

शिक्षक प्रशिक्षुओं को निम्न बीजीय प्रतिबन्ध को देकर चर के विभिन्न मान के लिए निष्कर्ष निकलवायें-

1. $4x + 3 = 2x + 11$
2. $2x(x^2-1) = 2x^3 - 2x$

प्रतिबन्ध (1) की तालिका			
x का मान	बाँया पक्ष	दाँया पक्ष	क्या बाया पक्ष-दाया पक्ष
1	7	13	नहीं
2	11	15	नहीं
3	15	17	नहीं
4	19	19	हाँ
5	23	21	नहीं

प्रतिबन्ध (2) की तालिका			
x का मान	बाँया पक्ष	दाँया पक्ष	क्या बाया पक्ष-दाया पक्ष
1	0	0	हाँ
2	12	12	हाँ
3	48	48	हाँ
4	120	120	हाँ
5	240	240	हाँ

उपरोक्त तालिका को देखकर आप दोनों प्रतिबन्धों के सम्बन्ध में क्या निष्कर्ष निकालते हैं? तालिका (1) का प्रतिबन्ध केवल चर के एक निश्चित मान के लिए संतुष्ट होता है जबकि तालिका (2) का प्रतिबन्ध चर के प्रत्येक मान के लिए संतुष्ट होता है। प्रतिबन्ध (1) समीकरण है जबकि प्रतिबन्ध (2) सर्वसमिका है।

निष्कर्ष-

अतः समीकरण एक ऐसा समानता सूचक बीजीय कथन है जो चर के कुछ निश्चित मान (या मानों) के लिए संतुष्ट होते हैं जबकि सर्वसमिका एक ऐसा समानता सूचक बीजीय कथन है जो चर के प्रत्येक मान के लिए सत्य होता है। यही समीकरण तथा सर्वसमिका में प्रमुख अन्तर है।

मूल्यांकन-

1. निम्नलिखित में सर्वसमिका है-

   (i) $2x + 3 = 5$ (ii) $2(x+1) = 2x+2$

   (iii) $4x = 2x+6$ (iv) $x+4 = 6-3x$

2. समीकरण $x + 7 = 9$ में x का मान है-

   (i) 2 (ii) 16

   (iii) 10 (iv) 4

3. निम्नलिखित में समीकरण है-

   (i) $4x + 3 > 5$ (ii) $2x+5 < 9$

   (iii) $4x + x^2 = x(x+4)$ (iv) $3x+5 = 8$

4. दिखाइए कि-

(i) $3x(x + 1) = 3x^2 + 3x$ एक सर्वसमिका है।

(ii) $x^2-1 = 4$ एक सर्वसमिका नहीं है।

(iii) $5x - 1 = 14$ एक समीकरण है।

(iv) $4x^2+4x+1 = (2x+1)^2$ एक सर्वसमिका है।

(v) $3x+4=8+9x$ एक समीकरण है।

5. मीरा ने गणित की पुस्तक खरीदने के लिए अपनी माँ से कुछ रूपये लिए। उसके पिताजी ने भी उसे ` 100 दिये। दोनों के रूपयों को मिलाकर उसके पास कुल ` 150 हो गये। मीरा ने अपनी माँ से कितने रूपये लिए ? समीकरण बनाकर स्पष्ट कीजिए।

6. समीकरण $x + 7 = 14$ को हल कीजिए।

7. समीकरण $2x + 5 = 13$ को हल कीजिए।

8. समीकरण $x - 9 = 3$ को हल कीजिए।

9. तालिका बनाकर सिद्ध कीजिए कि $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ एक सर्वसमिका हैं ?

10. तालिका बनाकर निष्कर्ष निकालिए कि प्रतिबन्ध $5x+4 = 3x+8$ तथा प्रतिबन्ध $x(x+2) = x^2+2x$ में कौन सा प्रतिबन्ध सर्वसमिका हैं ?

इकाई - 7

रेखीय समीकरण (एक चर में) का हल एवं इस पर आधारित प्रश्न

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी होगी-

(1) रेखीय समीकरणों की पहचान तथा उनकी विशेषताओं का ज्ञान

(2) रेखीय समीकरणों को हल करने की दक्षता

(3) समीकरण आधारित दैनिक जीवन से सम्बन्धित वार्तिक प्रश्नों को हल करने का कौशल

प्रशिक्षु समीकरणों से पूर्व परिचित है संक्षेप में एक समीकरण समता सूचक चिन्ह युक्त बीजीय व्यंजक पर एक प्रतिबन्ध है, जिसमें चर के किसी विशिष्ट मान के लिए व्यंजक के दोनों पक्षों का मान समान होता है। चर का यह विशिष्ट मान समीकरण का हल कहलाता है।

रेखीय समीकरण-

जब किसी समीकरण में उपस्थित चर की अधिकतम घात एक होती है तो ऐसे समीकरण को रेखीय समीकरण कहते हैं।

उदाहरण- $5x-8=10$, $2x+5=15$ आदि। एक चर वाले रैखिक समीकरण चर के केवल एक मान के लिए ही संतुष्ट होते हैं।

निम्नांकित समीकरण पर विचार कीजिए-

$4 + x = 24$

कथन के रूप में यह समीकरण क्या व्यक्त करता है ? उपर्युक्त समीकरण यह व्यक्त करता है कि 4 में x जोड़ने पर योगफल 24 प्राप्त होता है। इस समीकरण को हल करने का तात्पर्य है x का मान ज्ञात करना। स्पष्ट है कि यहाँ x का मान 20 है, क्योंकि 4 में 20 जोड़ने पर योगफल 24 प्राप्त होता है।

इसे हम इस प्रकार भी कह सकते हैं कि x के स्थान पर 20 प्रतिस्थापित करने से बायें पक्ष का मान दाएँ पक्ष के बराबर होता है अर्थात् समीकरण संतुष्ट हो जाता है।

अतः $x = 20$ समीकरण का हल है तथा 20 को समीकरण का मूल भी कहते हैं।

रेखीय समीकरण को त्रुटि एवं प्रयत्न विधि से हल करना-

प्रशिक्षुओं से रेखीय समीकरण को हल करने की चर्चा कीजिए।

उदाहरण 1- समीकरण $x + 3 = 7$ को हल कीजिए।

इस समीकरण को हल करने अर्थात् x का मान ज्ञात करने के लिए अधोलिखित तालिकानुसार x के विभिन्न मान का प्रतिस्थापन कीजिए।

समीकरण $x + 3 = 7$

x का मान	बायाँ पक्ष $(x+3)$	दायाँ पक्ष का दिया हुआ मान
0	0 +3 = 3	7
1	1 + 3 = 4	7
2	2 + 3 = 5	7
3	3 + 3 = 6	7
4	4 + 3 = 7	7

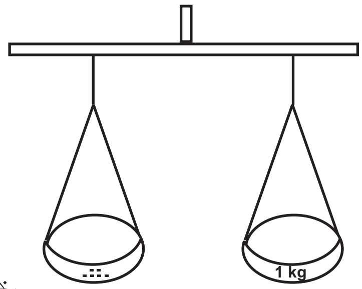
आप देखते हैं कि x के विभिन्न मानों में से केवल 4 ऐसा मान है जो समीकरण को संतुष्ट करता है। अर्थात्

$x = 4$ समीकरण का हल है।

रेखीय समीकरण हल करने की उपयुक्त विधि-

प्रशिक्षु से चर्चा करें कि समीकरण की तुलना हम तराजू से कर सकते हैं। तराजू के दोनों पलड़े समीकरण के दोनों पक्षों को प्रकट करते हैं। तराजू पर रखी हुई किसी वस्तु के भार (अज्ञात मान) को दूसरे पलड़े पर बॉट (ज्ञात मान) रखकर मालूम करते हैं। डंडी का क्षैतिज होना दोनों पलड़ों पर समान भार (समीकरण का संतुष्ट) होना दर्शाता है।

अज्ञात मान (वस्तु) = ज्ञात मान (बाँट)



क्रिया कलाप-

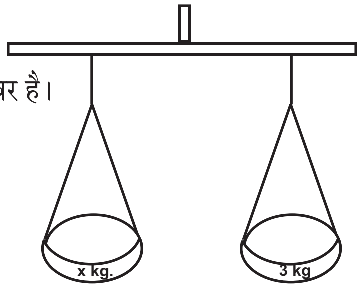
प्रशिक्षुओं से कहें कि वह एक तराजू लेकर निम्नांकित चित्रानुसार क्रियाकलाप करें।

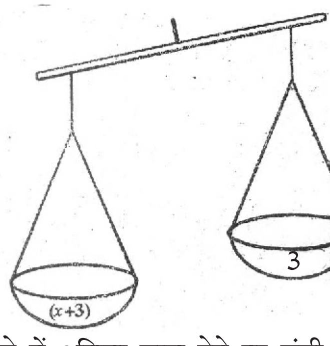
माना तराजू के एक पलड़े पर x किग्रा की एक वस्तु रखने पर तथा दूसरे पलड़े पर 3 किग्रा का बाट रखने पर चित्रानुसार तराजू की डंडी क्षैतिज रहती है।

आप देखते हैं कि डंडी क्षैतिज है अर्थात दोनों पलड़ों पर रखी हुई वस्तुओं के भार (मान) बराबर है।

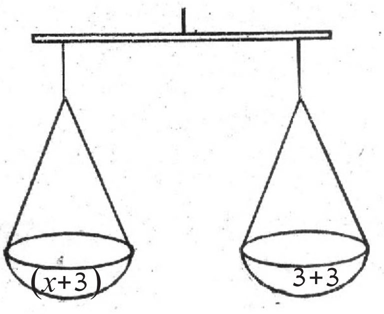
अर्थात् $x = 3$

अब निम्न क्रिया करें

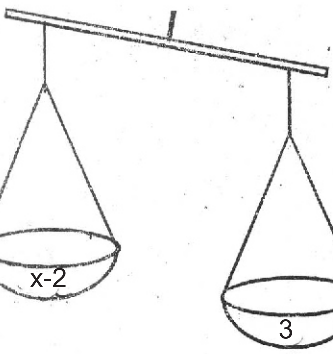




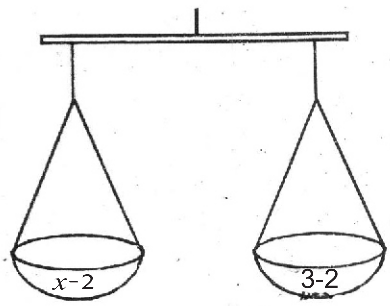
बायें पलड़े में 3किग्रा डाल देने पर डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।



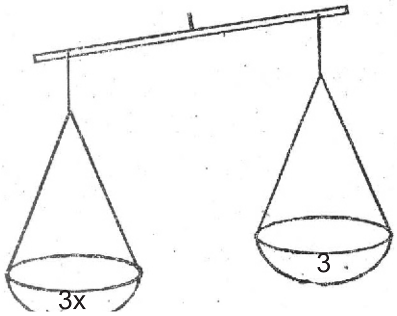
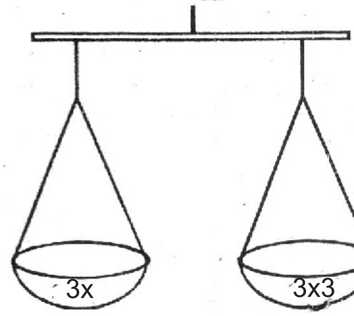
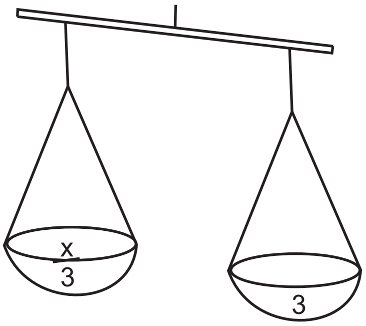
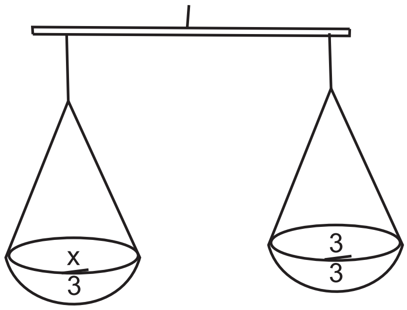
डंडी क्षैतिज करने के लिए दाएँ पलड़े में भी 3 किग्रा भार रखने पर $x+3 = 3+3$ या, $x + 3 = 6$



बायें पलड़े से 2 किग्रा भार निकाल लें तो डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।



डंडी क्षैतिज करने के लिए बाएँ पलड़े से भी 2 किग्रा भार निकालने पर $x - 2 = 3-2$ या, $x - 2 = 1$

 बाएँ पक्ष को तिगुना करने पर डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।	 डंडी क्षैतिज करने के लिए दाएँ पक्ष को भी तिगुना करेंगे 3x = 3 x 3 या, 3x = 9
 बाएँ पक्ष के भार को तिहाई करने पर डंडी क्षैतिज नहीं रहती है।	 डंडी क्षैतिज रखने के लिए दायें पलड़े के भार को तिहाई करना पड़ेगा। अर्थात् $\frac{x}{3} = \frac{3}{3} = 1$

अतः उपरोक्त क्रिया कलाप से निम्नांकित निष्कर्ष निकलता है-

- समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को जोड़ने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।
- समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या को घटाने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।
- समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या से गुणा करने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।
- समीकरण के दोनों पक्षों शून्येतर समान संख्या से भाग देने पर समीकरण अपरिवर्तित रहता है।

उपरोक्त सभी निष्कर्ष स्वयं सिद्धियाँ (Axioms) कहलाती हैं। इनका उपयोग समीकरण को हल करने में करते हैं।

उदाहरण 2 - समीकरण $x + 8 = 19$ को हल कीजिए एवं उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल- $x + 8 = 19$

या $x + 8 - 8 = 19 - 8$ (बॉयें पक्ष में केवल x चाहिए अतः +8 हटाने के लिए 8 घटाएँगें)

या $x = 11$

उत्तर की जाँच : बायाँ पक्ष = $x + 8 = 11 + 8 = 19 =$ दायाँ पक्ष

अतः समीकरण का हल $x = 8$ सही है।

उदाहरण 3 - समीकरण $x - 5 = 10$ को हल कीजिए।

हल : $x - 5 = 10$

या $x - 5 + 5 = 10 + 5$ (दोनों पक्षों में 5 जोड़ने पर)

या $x = 5$

उत्तर की जाँच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 4 - $\frac{x}{6} = 5$ को हल कीजिए।

हल- $\frac{x}{6} = 5$

या $\frac{x}{6} \times 6 = 5 \times 6$ (दोनों पक्षों में 6 से गुणा करने पर)

या $x = 30$

उत्तर की जाँच स्वयं कीजिए।

उदाहरण 5 - $4x = 24$ को हल कीजिए।

हल - $4x = 24$

या $\frac{4x}{4} = \frac{24}{4}$ (दोनों पक्षों में 4 से भाग देने पर)

या $x = 6$

उत्तर की जाँच स्वयं कीजिए।

इस प्रकार इन चारों विधाओं पर आधारित प्रश्न देकर प्रशिक्षुओं को समीकरण हल करने का पर्याप्त अभ्यास करायें।

दैनिक जीवन पर आधारित रेखीय समीकरण सम्बन्धी वार्तिक प्रश्न-

दैनिक जीवन से सम्बन्धित एवम् अन्य वार्तिक प्रश्नों से रेखीय समीकरण बनाने के लिए अज्ञात राशि को एक चर मानकर प्रत्येक कथन के लिए आवश्यकतानुसार कोष्ठक का प्रयोग करते हुए रेखीय समीकरण बनवाया जाय। तत्पश्चात् प्राप्त समीकरण को हल कराया जाये।

उदाहरण 6 - एक गाँव के निवासियों ने अपने गाँव में 102 पौधे लगाये। इनमें से कुछ आम के तथा कुछ अमरूद के पौधे थे। अमरूद के पौधों की संख्या आम के पौधों की संख्या के तीन गुने से 2 अधिक थे। आम तथा अमरूद के पौधों की संख्या अलग-अलग ज्ञात कीजिए। इस कथन को समीकरण की भाषा में अत्यन्त संक्षिप्त रूप से लिख सकते हैं।

मान लीजिए कि आम के पौधों की संख्या $= x$

अमरूद के पौधों की संख्या $= 3x + 2$

आम और अमरूद की संख्याओं का योग $= x + 3x + 2$

$= 4x + 2$

प्रश्नानुसार $4x + 2 = 102$

हल- $4x + 2 - 2 = 102 - 2$ (दोनो पक्षों में 2 घटाने पर)

या $4x = 100$

या $\frac{4x}{4} = \frac{100}{4}$ (दोनो पक्षों में 4 से भाग देने पर)

या $x = 25$

अतः आम के पौधों की संख्या = 25

अमरूद के पौधों की संख्या = 102 - 25 = 77

प्रशिक्षुओं से उत्तर का सत्यापन करायें।

सत्यापन : आम के पौधों की संख्या = 25

अमरूद के पौधों की संख्या = (25 का तीन गुना + 2)

= (25 × 3 + 3)

= 75 + 2

= 77

अतः आम के पौधों की संख्या + अमरूद के पौधों की संख्या = 25+77

= 102

अतः उत्तर सही है।

किसी कथन को समीकरण का रूप देने के लिए-

(1) प्रश्न पढ़कर ढूँढिएँ कि क्या ज्ञात करना है। इस अज्ञात मान को चर x मान लिया जाता है तथा प्रश्न के कथन के अनुसार चर x में एक व्यंजक प्राप्त कीजिए।

(2) चर x से युक्त व्यंजक और ज्ञात राशियों में एक समानता का सम्बन्ध स्थापित कीजिए। यही समीकरण होगा।

मूल्यांकन

(1) रेखीय समीकरण छाँटिये-

(i) $x + 8 = 27$ (ii) $3x - 5 = 2x + 8$

(iii) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ (iv) $\frac{x}{5} = 6$

(2) निम्नलिखित में x का मान ज्ञात कीजिए-

(i) $6x - 11 = 8 + 10$ (ii) $\frac{2x}{3} = 6$

(iii) $3a + 5 = 17$ (iv) $\frac{x}{2} - 1 = 2$

(3) समीकरण $7 + 5x = 15 + 3x$ को हल कीजिए।

(4) कक्षा 6 की दो टीमों के बीच क्रिकेट मैच खेला गया। प्रथम टीम के रनों की संख्या दूसरी टीम के रनों की संख्या दोगुने से 10 अधिक है। दोनों टीमों ने मिलकर 120 रन बनाये। इसे समीकरण द्वारा अभिव्यक्त कीजिए।

(5) वह कौन सी संख्या है, जिसके एक तिहाई में 5 जोड़ने पर 8 प्राप्त होता है।

(6) राम की उम्र श्याम से 5 वर्ष अधिक है। यदि राम की वर्तमान उम्र 28 वर्ष है, तो श्याम की वर्तमान उम्र ज्ञात कीजिए।

(7) 5 पुस्तकों का मूल्य 7 पुस्तकों के मूल्य से 14 रुपये कम है। एक पुस्तक का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(8) सचिन की वर्तमान उम्र ज्ञात कीजिए यदि वह 10 वर्ष पहले 35 वर्ष का था।

(9) सोनम के पिता की आयु उसकी आयु के तीन गुने से पाँच वर्ष अधिक है। यदि सोनम के पिता की आयु 44 वर्ष है तो सोनम की आयु ज्ञात कीजिए।

(10) एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष कोण प्रत्येक आधार कोण का दुगुना है। इस त्रिभुज के तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

(11) समीकरण $x + 7 = 13$ का हल है -

(i) 6 (ii) 20 (iii) 3 (iv) 5

(12) समीकरण $\frac{x}{4} = 12$ का हल है।

(i) 3 (ii) 48 (iii) 8 (iv) 16

इकाई - 8

व्यंजकों का गुणनफल तथा सर्वसमिकाएँ

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी होगी-

(1) व्यंजकों को गुणा करना।

(2) एक पदीय बीजीय व्यंजकों का गुणा

(3) एक पदीय व्यंजक और बहुपदीय व्यंजक का गुणा

(4) बहुपदीय व्यंजकों का गुणनफल

(5) सर्वसमिकाएँ

बीजगणित में अज्ञात संख्याओं के स्थान पर अक्षरों का प्रयोग किया जाता है। इन्हें अक्षर या बीज कहते हैं। कोई चर (बीज) या अचर संख्या या इनका समूह गणितीय संक्रियाओं के चिन्हों से युक्त होने पर बीजीय व्यंजक कहलाता है। जैसे $5x^2+7xy-1$ एक व्यंजक है जिसमें x तथा y चर है तथा 5, 7, -1 अचर है। यह $5x^2$, $7xy$ तथा -1 के योग से बना है। ये व्यंजकों के खण्ड है जिन्हें मूल व्यंजक के पद कहते हैं।

(1) एक पदीय बीजीय व्यंजकों का गुणा-

(i) **एक पदीय बीजीय व्यंजकों का गुणा-** प्रशिक्षुओं को अवगत कराइए कि यदि 6 किग्रा सेब x रुपये प्रति किग्रा के दर से खरीदना हो तो 6 किग्रा सेब का मूल्य $6x$ रुपया होगा। अर्थात् एक पदीय व्यंजक x को 6 से गुणा करने के उपरान्त ही सेब का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है। इसी प्रकार x सेमी लम्बाई तथा 2 सेमी चौड़ाई के आयत का क्षेत्रफल $2x$ सेमी^{2} होगा जो एक पद x और 2 को गुणा करने के बाद प्राप्त होता है।

उदाहरण 1 - निम्नांकित व्यंजकों का गुणा कीजिए-

(i) $2x \times 6$ (ii) $5 \times 4y$ (iii) $2 \times 4x \times 8$ (iv) $5x \times 7 \times 2$

हल : (i) $2x \times 6 = 2 \times 6 \times x = 12x$ (ii) $20y$ (iii) $64x$ (iv) $70x$

अतः

किसी बीजीय व्यंजक को किसी संख्या से गुणा करने के लिए संख्या को बीजीय व्यंजक के गुणांक की संख्या से गुणा करते हैं।

(2) समान आधार वाले घातांकीय व्यंजकों का गुणा-

निम्नांकित गुणनफल से प्रशिक्षु पूर्व से परिचित होंगे-

$3x \times x = 3x^2$

$3x \times 4x = 12x^2$

$x^2 \times x^4 = x^{2+4} = x^6$

$4x^2 \times 2x^2 \times 5x^4 = 40x^{2+2+4} = 40x^8$

$2x^2 \times y \times y^3 \times x^5 = 2x^{2+5}\, y^{1+3} = 2x^7y^4$

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि-

समान आधार वाले बीजीय व्यंजकों का गुणनफल उसी आधार पर उनके घांताकों के योगफल के बराबर होता है।

(3) विभिन्न चर वाले एक पदी व्यंजकों का गुणा-

विभिन्न चर वाले एक पदीय व्यंजकों के गुणनफल को निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित करते हैं-

$x \times y = xy \quad x.y = xy$

$x \times y \times z = xyz$

$a \times b \times c \times d = abcd$

गुणनफल में अक्षरों (चर राशियों) के बीच के गुणन चिन्ह (×) को नहीं लिखते हैं। इसी प्रकार अचर तथा चर के गुणनफल में भी गुणनचिन्ह (×) नहीं लिखते हैं।

(2) एक पदीय व्यंजक और बहुपदीय व्यंजक का गुणा-

एक पदीय व्यंजक से बहुपदीय व्यंजक में गुणा करने के लिए एक पदीय व्यंजक से बहुपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं अर्थात्

$$5x(3x^3 - 2y + 3z) = 15x^4 - 10xy + 15xz$$

$$5xy \times (3x^2 + xy) = 5xy \times 3x^2 + 5xy \times xy$$

$$= 15x^3y + 5x^2y^2$$

$$x \times (y - z) = xy - xz$$

$$3xy^2 \times (2x - 3xy + 7y) = 3xy^2 \times 2x - 3xy^2 \times 3xy + 3xy^2 \times 7y$$

$$= 6x^2y^2 - 9x^2y^3 + 21xy^3$$

(3) बहुपदीय व्यंजकों का गुणा-

दो बहुपदीय व्यंजकों का परस्पर गुणा करने के लिए प्रथम बहुपद के प्रत्येक पद से द्वितीय बहुपद के प्रत्येक पद में गुणा करते हैं। जैसे-

$$(x+y) \times (z+y) = x(z+y) + y(z+y)$$

$$= xz + xy + yz + y^2$$

$$(x^2+2+y+z) \times (3x-4y) = x^2.(3x-4y) + 2(3x-4y) + y(3x-4y) + z(3x-4y)$$

$$= x^2 . 3x - x^2 . 4y + 2.3x - 2.4y + y.3x - y.4y + z.3x - z.4y$$

$$= 3x^3 - 4x^2y + 6x - 8y + 3xy - 4y^2 + 3xz - 4yz$$

सर्वसमिका-

प्रशिक्षुओं से दैनिक जीवन से सम्बन्धित उदाहरण के द्वारा सर्वसमिका के बारे में चर्चा करें।

अमित के पास कुछ रुपये थे। सुमित के पास अमित से एक रुपया अधिक है। दोनों के रुपयों की संख्या का गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल अमित के रुपयों की संख्या का वर्ग और उसके रुपयों की संख्या के योग के बराबर है।

माना कि अमित के पास x रुपये हैं तो सुमित के रुपयों की संख्या $= x+1$

अमित और सुमित के रुपयों की संख्या का गुणनफल $= x(x+1)$

अमित के रुपयों की संख्या का वर्ग $= x^2$

पुनः अमित के रुपयों की संख्या का वर्ग + उसके रुपयों की संख्या $= x^2+x$

अतः $x(x+1) = x^2+x$

यहाँ हम देखते हैं कि अमित के पास रुपयों की संख्या चाहे जितनी भी हो प्रत्येक दशा में दिया गया सम्बन्ध सदैव संतुष्ट होता है।

इस प्रकार किसी समानता सूचक गणितीय कथन में चर के विभिन्न मान प्रतिस्थापित करने पर दोनों पक्ष समान हो तो वह सर्वसमिका कहलाती है।

इस सर्वसमिका को निम्नलिखित सारणी द्वारा चर्चा करें-

चर x	बायाँ पक्ष $x(3x+2)$	दायाँ पक्ष $3x^2+2x$	दोनों पक्षों के मानों में सम्बन्ध
1	5	5	बराबर है
2	16	16	बराबर है
3	33	33	बराबर है

अतः $x(3x+2) = 3x^2+2x$ एक सर्वसमिका है।

मानक सर्वसमिकाएँ - अब प्रशिक्षु से कुछ अन्य सर्वसमिका के बारे में चर्चा करेंगे।

(1) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

चूँकि $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$

$= a^2 + ab + ba + b^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$

आंकिक सत्यापन : माना $a = 2, b = 4$

बायाँ पक्ष = $(a+b)^2 = (2+4)^2 = (6)^2 = 36$

दायाँ पक्ष = $a^2 + 2ab + b^2 = (2)^2 + 2 \times 2 \times 4 + (4)^2 = 4+16+16 = 36$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

(2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

बायाँ पक्ष = $(a-b)^2$

$= (a-b)(a-b)$

$= a^2 - ab - ba + b^2$

$= a^2 - 2ab + b^2$

= दायाँ पक्ष

आंकिक सत्यापन : $a = 2, b = 3$

बायाँ पक्ष = $(a-b)^2$

$= (2-3)^2$

$= (-1)^2 = 1$

दायाँ पक्ष = $a^2 - 2ab + b^2$

$= (2)^2 - 2 \times 2 \times 3 + (3)^2$

$= 4 - 12 + 9$

$= 13 - 12$

$= 1$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

(3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

दायाँ पक्ष = $(a+b)(a-b)$

$= a \times a - ab + b \times a - b \times b$

$= a^2 - ab + ab - b^2$

$= a^2 - b^2$

= बायाँ पक्ष

अतः $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

आंकिक सत्यापन : $a = 2, b = 5$

बायाँ पक्ष $= a^2 - b^2$

$= (2)^2 - (5)^2$

$= 4 - 25$

$= -21$

दायाँ पक्ष $= (a+b)(a-b)$

$= (2+5)(2-5)$

$= 7 \times (-3)$

$= -21$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

(4) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

बायाँ पक्ष $= (x+a)(x+b)$

$= x.x + x.b + a.x + ab$

$= x^2 + (a+b)x + ab$

= दायाँ पक्ष

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

आंकिक सत्यापन : $x = 1,\ a = 3, b = 4$

बायाँ पक्ष $= (1+3)(1+4)$

$= 4 \times 5$

$= 20$

दायाँ पक्ष $= x^2 + (a+b)x + ab$

$= (1)^2 + (3+4) \times 1 + 3x4$

$= 1 + 7 + 12$

$= 20$

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

उपर्युक्त चारों मानक सर्वसमिका है।

शिक्षक प्रशिक्षुओं से निम्नांकित क्रिया कलाप करवायें-

(1) सर्वसमिका $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का क्रियात्मक सत्यापन

आवश्यक सामग्री

तीन रंग (लाल, हरा, पीला) के ग्लेज पेपर, दफ्ती, थर्माकोल, कैंची, पेन्सिल और गोंद आदि।

क्रिया विधि

दफ्ती से एक $a = 6$ सेमी लम्बाई के वर्ग की आकृति बनाकर काट लीजिए। लाल रंग के ग्लेज पेपर से 6 सेमी लम्बाई का वर्ग बनाकर इस वर्ग पर चिपका लीजिए।

इसी प्रकार दफ्ती से b = 4 सेमी लम्बाई की वर्ग आकृति बनाइए। अब इस वर्ग पर हरे रंग के ग्लेज पेपर से 4 सेमी लम्बाई का वर्ग बनाकर चिपका लीजिए।

दफ्ती से दो आयताकार आकृतियाँ जिनकी लम्बाई a = 6 सेमी और चौड़ाई b = 4 सेमी हो बनाकर काट लीजिए इन पर पीले रंग के ग्लेज पेपर से इसी नाप की आयताकार आकृतियाँ बनाकर चिपका लीजिए।

दफ्ती से तैयार की गई आकृतियाँ

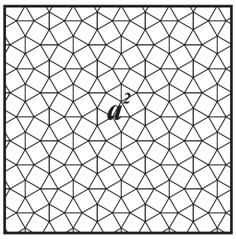
पैमाना

6 सेमी = 3 सेमी

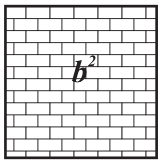
4 सेमी = 2 सेमी

6 सेमी

6 सेमी



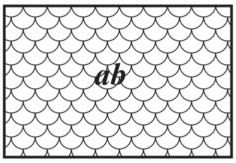
4 सेमी



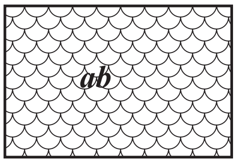
4 सेमी

6 सेमी

4 सेमी



6 सेमी

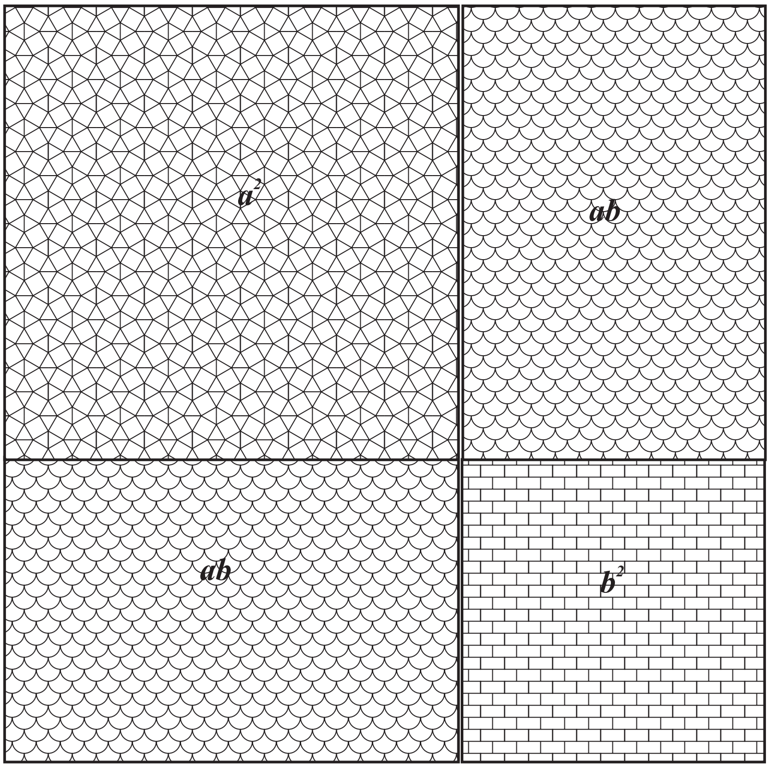


4 सेमी

बनी हुई चारों आकृतियों को थर्माकोल के ऊपर निम्न प्रकार से व्यवस्थित कीजिए कि चारों भुजाओं की लम्बाई $(a+b) = 6+4=10$ सेमी हो जाय।

6 सेमी 4 सेमी

6 सेमी



6 सेमी

4 सेमी

4 सेमी

6 सेमी 4 सेमी

थर्मोकोल पर व्यवस्थित आकृति एक वर्ग की है जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई

$(a+b) = 6+4=10$ सेमी है।

इस प्रकार बने वर्ग का क्षेत्रफल $= (a+b)^2 = (6+4)^2$

$= (10)^2$ वर्ग सेमी = **100 वर्ग सेमी**

आकृति (i) का क्षेत्रफल $(a)^2 = (6)^2$

= 36 वर्ग सेमी

आकृति (ii) का क्षेत्रफल $(b)^2 = (4)^2$

= 16 वर्ग सेमी

आकृति (iii) और (iv) का क्षेत्रफल = $2 \times a \times b = 2 \times 6 \times 4$

= 48 वर्ग सेमी

अतः नये वर्ग आकृति का क्षेत्रफल

= चारों आकृतियों के क्षेत्रफलों का योगफल

$(6+4)^2 = (6)^2 + (4)^2 + (6 \times 4) + (6 \times 4)$

$= (6)^2 + (4)^2 + 2(6 \times 4)$

= 36 + 16 + 48

= 100 वर्ग सेमी

परिणाम

उपरोक्त क्रियाकलाप से इस सर्वसमिका का सत्यापन किया गया है।

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2 \times ab$

$= a^2 + b^2 + 2ab$

नोट- इसी प्रकार a तथा b की विभिन्न नापों से इस सर्वसमिका का सत्यापन किया जा सकता है।

(2) सर्वसमिका $(a^2 - b^2)$ का क्रियात्मक निरूपण

आवश्यक सामग्री-

तीन रंग (लाल, नीला, पीला) के ग्लेज पेपर दफ्ती या कार्ड बोर्ड, कैंची, पेन्सिल, पटरी, गोंद आदि।

क्रिया विधि

दफ्ती पर एक वर्ग की आकृति बनाइए जिसकी भुजा की लम्बाई $a=10$ सेमी हो।

प्राप्त वर्ग आकृति का क्षेत्रफल = $(10)^2$

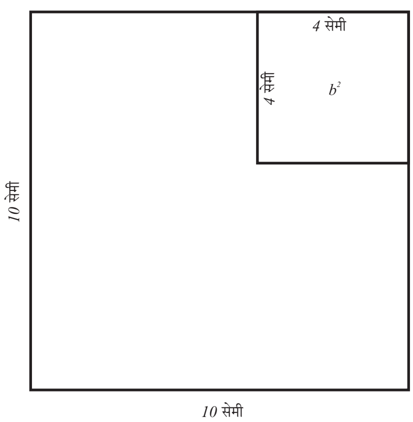
= 100 वर्ग सेमी

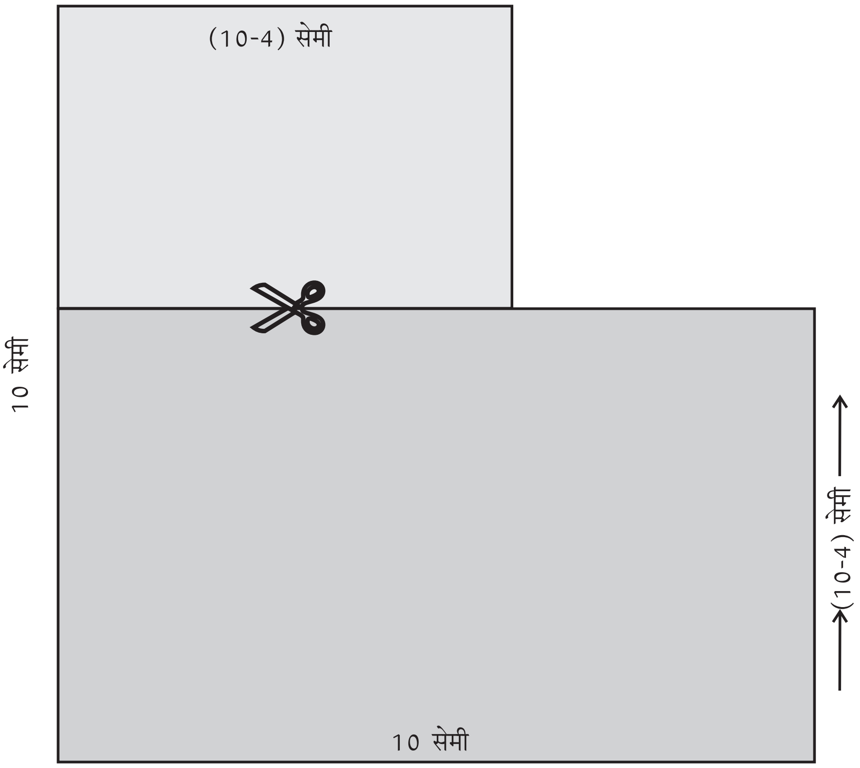
इस वर्ग से नीचे दिये चित्र के अनुसार $b = 4$ सेमी भुजा का एक वर्ग काट लीजिए।

पैमाना

2 सेमी = 1 सेमी

10 सेमी. भुजा के वर्ग से $b=4$ सेमी का वर्ग काटने पर शेष भाग का क्षेत्रफल = $(10^2 - 4^2)$ वर्ग सेमी

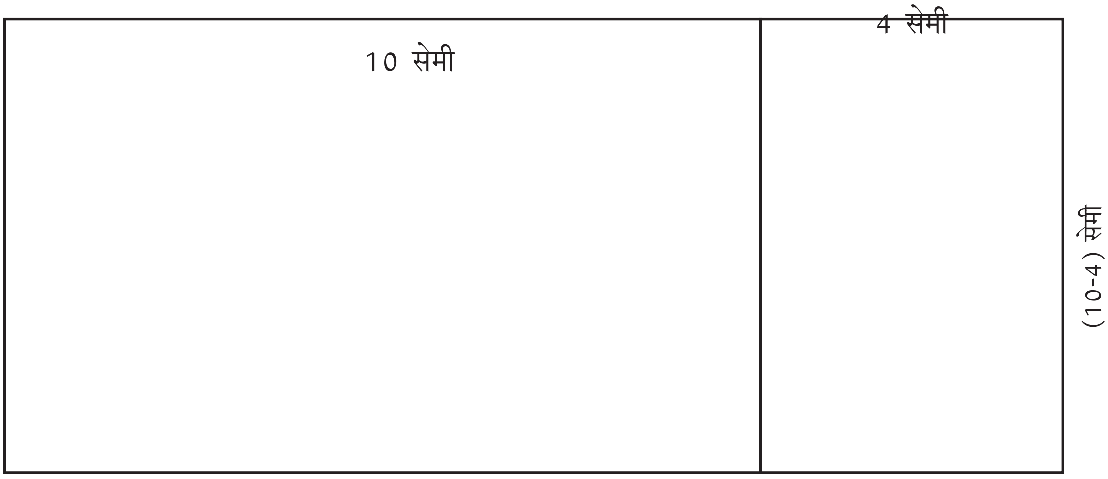




अब शेष भाग से आयताकार भाग जिसकी लम्बाई 10 सेमी और चौड़ाई 6 सेमी है, काटकर अलग कीजिए।

आकर्षक बनाने के लिए कटे हुये आयताकार भाग पर लाल रंग का ग्लेज पेपर चिपका लीजिए, और कटे हुए दूसरे भाग पर पीले रंग का ग्लेज पेपर चिपका लीजिए।

लाल और पीले रंग की इन आकृतियों को निम्न चित्र के अनुसार व्यवस्थित कीजिए।



प्राप्त आकृति आयताकार है, जिसकी लम्बाई = (10 + 4) सेमी

चौड़ाई = (10 - 4) सेमी

इस आयताकार आकृति का क्षेत्रफल = (10 + 4) × (10 - 4) वर्ग सेमी

अतः $(10^2 - 4^2) = (10 + 4)(10 - 4)$

अतः चित्र 1, 2 एवं 3 से स्पष्ट है कि :

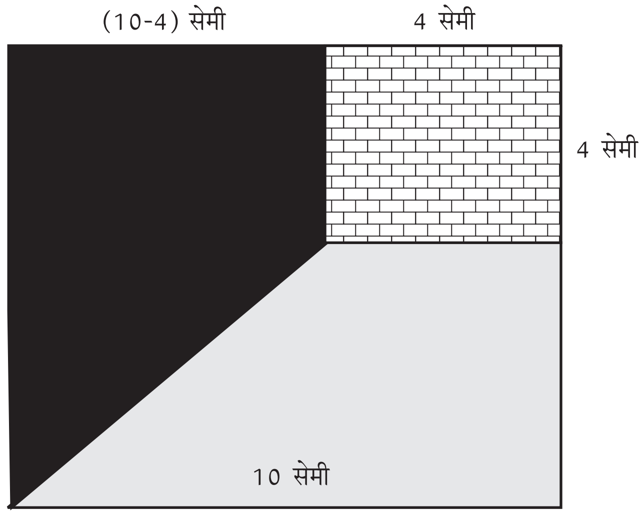
$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

यहाँ $a = 10, b = 4$

परिणाम :

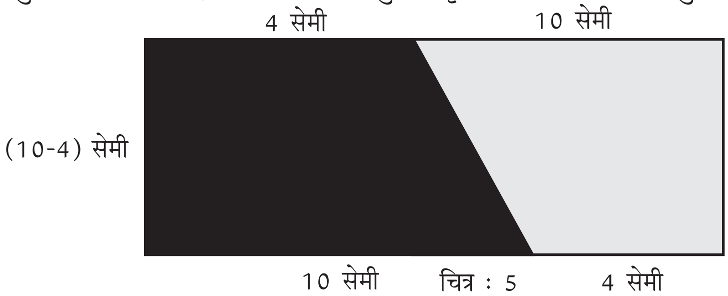
उपरोक्त से $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

वैकल्पिक विधि

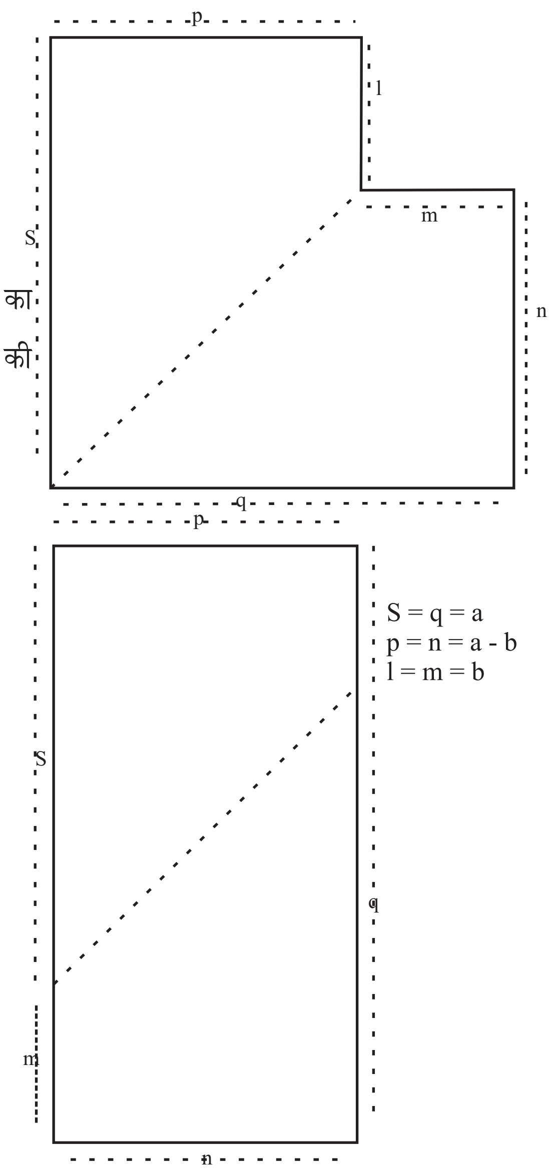


चित्र - 4

वर्ग a^2 की आकृति में से b^2 की आकृति को काट कर अलग करने के बाद शेष बची हुई आकृति में कटे हुए कोने के विकर्ण के अनुदिश काट लीजिए। इस प्रकार कटी हुई आकृतियों को चित्र 5 के अनुसार व्यवस्थित कीजिए-



चित्र : 5



10 सेमी भुजा के वर्ग से b = 4 सेमी का वर्ग काटने पर शेष भाग का क्षेत्रफल = $(10^2 - 4^2)$ वर्ग सेमी चित्रानुसार व्यवस्थित आयताकार आकृति की लम्बाई (10 + 4) सेमी और चौड़ाई (10 - 4) सेमी है।

अतः प्राप्त आयताकार आकृति का क्षेत्रफल

$= (10 + 4)(10 - 4)$

$= (10^2 - 4^2) = (10 + 4)(10 - 4)$

$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

जहाँ $a = 10, b = 4$

परिणाम

उपरोक्त से

$(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$

उपरोक्त क्रियाकलाप $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$ की ओर अधिक स्पष्ट किया गया है।

(3) सर्वसमिका $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ का ज्यामितीय निरूपण द्वारा सत्यापन

वर्ग AEFM का क्षेत्रफल = $(a - b)^2$

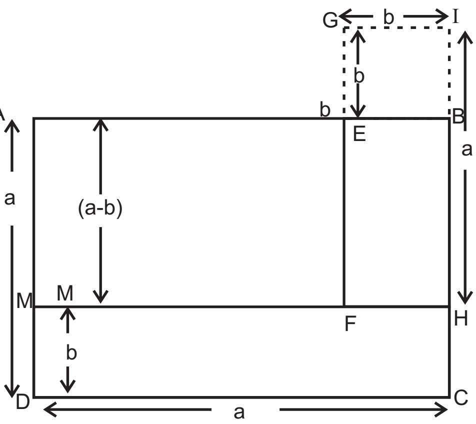
वर्ग ABCD का क्षेत्रफल = a^2

आयत MHCD का क्षेत्रफल = ab

आयत FHIG का क्षेत्रफल = ab

वर्ग EGIB का क्षेत्रफल = b^2

वर्ग AEFM = वर्ग ABCD+ वर्ग EGIB - आयत MHCD - आयत FHIG



$\therefore (a-b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab$

$= a^2 - 2ab + b^2$

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = a^2 + b^2 - ab - ab}$$

(पहला पद - दूसरा पद)^2 = (पहला पद)^2 - 2(पहला पद) × (दूसरा पद) + (दूसरा पद)^2

यहाँ पर आयत GFHI आयत EFHB वर्ग GEBI जब आयत GFHI = FH x HI = a xb को घटाया जाता है तो वर्ग GEBI = EB x BI = b x b = b^2 भी घट जाता है। इसीलिये वर्ग GEBI को जोड़ा जाता है।

मूल्यांकन-

(1) $3x^2$ तथा $5xy$ का गुणा कीजिए।

(2) $(-4x^2) \times (-3ay) \times (-2/3\ bx)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(3) $(5x^2y^2z^2)$ *तथा* $-4xy^3z^4$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(4) एक विद्यालय में $4x$ कक्षाएँ हैं। प्रत्येक कक्षा में विद्यार्थियों की संख्या $(x^4+2x^3+4x^2+8)$ है। विद्यालय में विद्यार्थियों की कुल संख्या कितनी है?

(5) $(2x^2+3x-7)$ तथा $(5x^3+2x^2+3x-4)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(6) $(x+9)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

(7) एक कलम का मूल्य $(2x-y)$ रुपये है। इसी प्रकार $(2x+y)$ कलमों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(8) एक पुस्तक का मूल्य $(5x+1)$ रुपये है। इसी प्रकार की $(5x-1)$ पुस्तकों का मूल्य ज्ञात कीजिए।

(9) यदि $x + \frac{1}{x} = 2$, तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(10) सर्वसमिकाओं का प्रयोग करके निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए-

(i) 51^2 (ii) 99^2 (iii) 95^2 (iv) 52×48 (v) 10.5×9.5

(11) $(x+3)$ तथा $(x-3)$ का गुणनफल है-

(i) x^2-9 (ii) x^2+9 (iii) $x(x-3)$ (iv) x^2+x+1

(12) यदि $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ तो $x^2 + \frac{1}{x^2}$ का मान है-

(i) $\frac{13}{4}$ (ii) $\frac{15}{4}$ (iii) $\frac{17}{4}$ (iv) $\frac{19}{4}$

(13) $(x+5)^2$ का मान है-

(i) $x^2+25+10x$ (ii) x^2+25 (iii) x^2+10 (iv) $x^2+25-10$

इकाई - 9

क्षेत्रफल, आयतन और धारिता की संकल्पना

इस इकाई के अध्ययन से क्षेत्रफल और धारिता की जानकारी होगी।

क्षेत्रफल की संकल्पना -

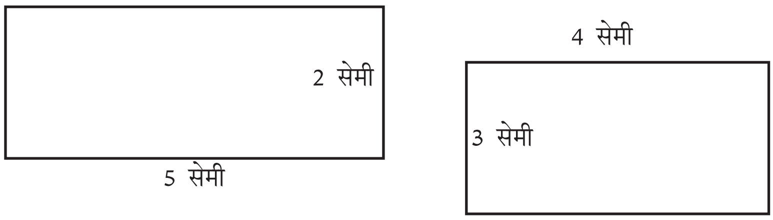
शिक्षक प्रशिक्षुओं से मेज पर किताब, कापी, माचिस, गेंद तथा कंच रखकर चर्चा करते हैं कि मेंज पर रखी वस्तुओं में से कौन सी वस्तु मेज पर स्थिर रहती है, और कौन सी वस्तु लुढ़क जाती है ? ऐसा क्यों होता है ? शिक्षक प्रशिक्षुओं को स्पष्ट करते है कि किताब, कापी तथा माचिस के ऊपर-नीचे के भाग (पृष्ठ) सपाट है। इसलिए ये मेज पर स्थित है। इनके पृष्ठ समतल होते हैं। परन्तु कंचे तथा गेंद जैसी वस्तुएँ लुढ़क जाती हैं क्योंकि इनके बाहरी भाग (पृष्ठ) वक्र हैं।

क्रियाकलाप-

कागज के दो आयताकार टुकड़े लीजिए। एक टुकड़े की लम्बाई 5 सेमी तथा चौड़ाई 2 सेमी है तथा दूसरा टुकड़ा 4 सेमी लम्बा और 3 सेमी चौड़ा है। दोनों टुकड़ों के परिमाप निकालिए।

पहले टुकड़े का परिमाप = 5 + 2 + 5 + 2
= 14 सेमी

दूसरे टुकड़े का परिमाप = 4 + 3 + 4 + 3
= 14 सेमी

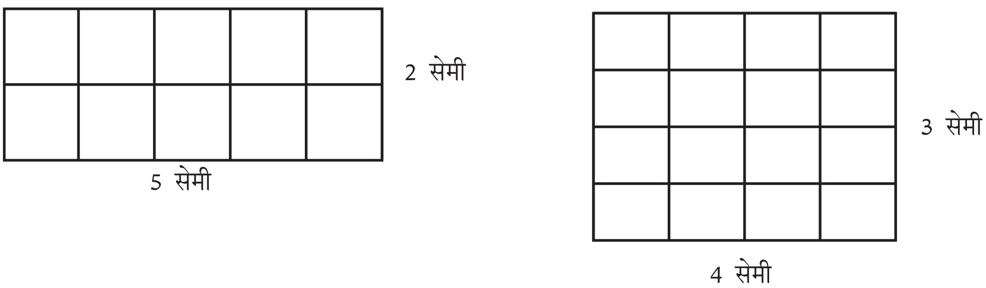


आप देखते हैं कि दोनों टुकड़ों के परिमाप समान है। अब आप बताइए कि कौन सा टुकड़ा अधिक क्षेत्र (भाग) घेरता है ?

यह देखने के लिए दोनों टुकड़ों के अन्दर के भाग को नापना होगा अर्थात क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा। प्रशिक्षु स्वयं ध्यान दें कि परिमाए एक बन्द आकृति के बाह्य माप है और क्षेत्रफल एक बन्द आकृति द्वारा घेरे गये क्षेत्र (भाग) को दर्शाता है।

14 सेमी परिमाप वाले दोनों टुकड़ों को लम्बाई में नापते हुए 1-1 सेमी की दूरीपर खड़ी रेखाएँ खींचिए। पुनः दोनों टुकड़ों के चौड़ाई में मापते हुए 1-1 सेमी की दूरी पर पड़ी रेखाएँ खींचिए। दोनों टुकड़ों में खाने बन गये हैं।

इन खानों को गिनकर लिखिए। दोनों टुकड़ों में कितने-कितने खाने है।



स्पष्ट है कि पहले टुकड़े में 10 खाने तथा दूसरे टुकड़े में 12 खाने है। स्पष्ट अर्थ है कि दूसरा टुकड़ा पहले टुकड़े से बड़ा है।

किसी क्षेत्र को 1 सेमी भुजा वाले वर्गो अर्थात् इकाई क्षेत्र की संख्या से मापते हैं। यह देखते हैं कि इकाई क्षेत्र दिये गये क्षेत्र में कितनी बार आता है। उस क्षेत्र का यह माप ही क्षेत्रफल होता है।

क्रियाकलाप-

बराबर माप की किताबें या चौकोर कार्ड लेकर मेज के ऊपरी तल को ढँक दीजिए। यदि मेज का ऊपरी तथा 12 किताबों या 15 कार्डो से ढँक गया है तो मेज की ऊपरी पृष्ठ का क्षेत्रफल 12 किताबों के सतह के क्षेत्रफल या 15 कार्डो के क्षेत्रफल के बराबर होगा।

सोच कर बताइए कि यदि मेज की सतह को वृत्ताकार कार्डो से ढँकें तो मेज की सतह पूरी तरह ढँकेगी या नही ?

आयतन की संकल्पना-

शिक्षक प्रशिक्षु से चर्चा करें कि ठोस पदार्थों में लम्बाई और चौड़ाई के साथ-साथ मोटाई या ऊँचाई भी होती है। यह सभी ठोस एक निश्चित स्थान घेरती हैं किसी ठोस पदार्थ का कम या अधिक स्थान घेरना उसके आकार पर निर्भर करता है।

क्रियाकलाप-

धातु के दो असमान आकार के बेलन 'अ' और 'ब' लीजिए। दो एक समान बाल्टियों में बराबर मात्रा में पानी भरियें। अब बाल्टियों में पानी के तल की ऊँचाई पटरी खड़ी करके माप लीजिए। एक बाल्टी-1 में बेलन 'अ' तथा दूसरी बाल्टी-2 में बेलन 'ब' को डुबाएँ। फिर से दोनों बाल्टियों के पानी के तलों को नापिए।

आप देखेंगे कि बाल्टी-1 के पानी का तल बाल्टी-2 के पानी के तल से ऊँचा उठ गया है। इससे यह पता चलता है कि बेलन 'अ' बेलन 'ब' की तुलना में अधिक स्थान घेरता है।

एक ठोस जितना स्थान घेरता है वह उसका आयतन कहलाता है।

धारिता की संकल्पना-

किसी बर्तन में जितना द्रव (तरल) पदार्थ भरा जा सकता है वही उसकी धारिता है। यदि किसी बाल्टी में चार जग पानी आता है तो बाल्टी की धारिता चार जग होगी। अतः किसी बर्तन द्वारा किसी द्रव के धारण करने की क्षमता उसकी धारिता कहलाती है। द्रव पदार्थों की प्रकृति बहने की है। पानी, पेट्रोल, दूध, मिट्टी का तेल आदि पदार्थ बर्तन में रखें जाते हैं। बर्तन में लम्बाई, चौड़ाई तथा गहराई (ऊँचाई) होती है। इसलिए द्रवों की माप भी आयतन के रूप में ही होता है। जिसे धारिता कहते हैं। धारिता की इकाई लीटर है।

1 लीटर क्या है ?

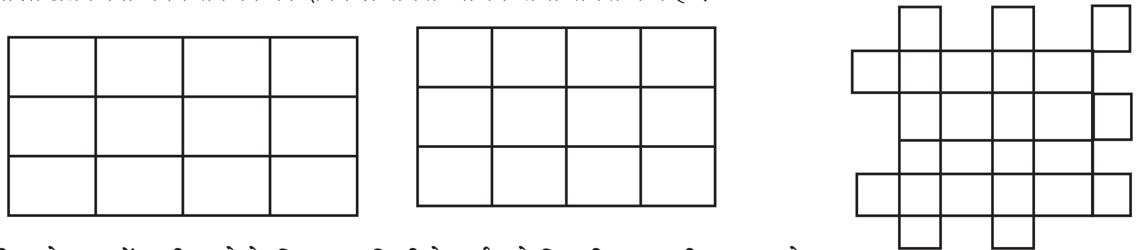
एक ऐसा घनाकार बर्तन जिसकी आन्तरिक विमायें इस प्रकार हों, कि वह 10 सेमी लम्बा 10 सेमी चौड़ा और 10 सेमी ऊँचा हो तो उसका आयतन 10 सेमी x 10 सेमी x 10 सेमी अर्थात् 1000 घनसेमी या 1000 सेमी^{3} होता है। इस बर्तन में यदि किसी द्रव को ऊपर तक भरा जाये तो उस द्रव का आयतन 1000 घनसेमी या 1 लीटर कहलायेगा।

1000 घनसेमी = 1 लीटर
= 1000 मिली लीटर
1/4 लीटर = 250 मिली लीटर

ग्वाले के पास 1/4 लीटर, 1/2 लीटर एवं 1 लीटर का नपना रहता है अर्थात् 250ml , 500ml एवं 1000ml के नपने के प्रयोग से दूध नापा जाता है। अन्य प्रकार के द्रव पदार्थ जैसे सरसों का तेल, मिट्टी का तेल (Kerosene) इत्यादि भी इन्हीं नपनों से नापे जाते हैं।

मूल्यांकन-

1. निम्नलिखित चित्रों में किस चित्र का क्षेत्रफल सबसे अधिक तथा सबसे कम है ?



2. 3 लीटर के जग में पानी भरने के लिए 50 मिली के बर्तन से कितनी बार पानी डालना होगा ?
3. 4 लीटर दूध नापने के लिए 250 मिली के नपने से कितनी बार दूध नापना होगा ?
4. 2 लीटर के बर्तन को 250 मिली के बर्तन से पाँच बार पानी से भरा जाता है। इसके बाद 50 मिली के नपने से शेष भाग को कितनी बार में भरा जा सकता है ?

इकाई - 10

आयत, वर्ग एवं त्रिभुज का क्षेत्रफल

इस इकाई के अध्ययन से आयत, वर्ग एवं त्रिभुज के क्षेत्रफल के माप के सूत्र की जानकारी होगी।

एक सेमी लम्बा 1 सेमी चौड़ा नाप का वर्ग समतल में जितना स्थान घेरता है उसे 1 वर्ग सेमी या 1 सेमी^{2} कहते हैं। यह क्षेत्रफल की इकाई (Unit) है। इसी प्रकार 1 मीटर लम्बाई एवं 1 मीटर चौड़ाई का वर्ग समतल में जितना स्थान घेरता है उसे 1 वर्ग मीटर या 1 मीटर^2 कहते हैं। एक वर्ग मीटर अर्थात् 1 मीटर लम्बाई और 1 मीटर चौड़ाई के वर्ग में 1 वर्ग सेमी माप के 10,000 वर्ग समा जायेंगे।

आयत के क्षेत्रफल के लिये सूत्र-

5 सेमी एवं 2 सेमी चौड़ाई का एक आयत बनाया गया। इस आयत में 1 सेमी लम्बाई एवं 1 सेमी चौड़ाई के वर्ग बनाये गये। इस प्रकार इस आयत में 1 वर्ग सेमी क्षेत्रफल के 10 वर्ग प्राप्त हुए।

इस प्रकार आयत का क्षेत्रफल 10 वर्ग सेमी हुआ।

इस प्रकार आयत का क्षेत्रफल = 5 सेमी x 2 सेमी

= 10 वर्ग सेमी

= 10 सेमी^{2}

अतः

आयत के क्षेत्रफल की माप के लिये सूत्र = लम्बाई x चौड़ाई

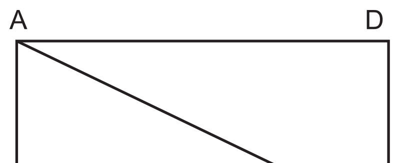
इसी प्रकर वर्ग के क्षेत्रफल की माप के लिए सूत्र = लम्बाई x चौड़ाई

= लम्बाई x लम्बाई (∴ वर्ग की लम्बाई व चौड़ाई समान होती है)

= (लम्बाई)^2

या भुजा^{2}

त्रिभुज के क्षेत्रफल की माप के लिये सूत्र-



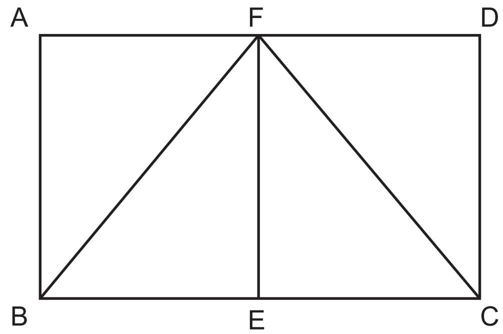
ABCD एक आयत बनाया गया जिसको विकर्ण AC से दो बराबर समकोण त्रिभुजों में बाँटा गया। इस प्रकार आयत ABCDका क्षेत्रफल = BC x AB

समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 1/2 x आयत ABCD का क्षेत्रफल

अतः समकोण त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल = 1/2BC x AB

= 1/2 x आधार x ऊँचाई

पुनः आयत को विकर्ण द्वारा आधा-आधा न विभाजित कर चित्रानुसार विभाजित किया गया।



इस चित्र में FBC समकोण त्रिभुज नहीं है।

Δ FBC का क्षेत्रफल = Δ FBE का क्षेत्रफल + Δ FEC का क्षेत्रफल

= 1/2 ABEF आयत का क्षेत्रफल + 1/2 FECD आयत का क्षेत्रफल

= 1/2 (BEXFE) + 1/2 (ECXFE)

= 1/2 (BE + EC) x FE

= 1/2 BC x FE

= 1/2 x आधार x ऊँचाई

त्रिभुज के क्षेत्रफल के लिये आधार एवं आधार के सम्मुख शीर्ष से डाले गये लम्ब की नाप ही त्रिभुज की ऊँचाई होती है।

उदाहरण- एक आयत की भुजाओं की माप 4 मीटर एवं 25 सेमी है आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : आयत का क्षेत्रफल = 4 मीटर x 25/100 मीटर

= 1 मीटर^2 = 1 वर्ग मीटर

निष्कर्षतः

आयत का क्षेत्रफल	= लम्बाई x चौड़ाई
वर्ग का क्षेत्रफल	= (वर्ग की भुजा)^2
त्रिभुज का क्षेत्रफल	= 1/2 x त्रिभुज का आधार x आधार के सम्मुख शीर्ष से डाला गया लम्ब
समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल	= समान्तर चतुर्भुज कीएक भुजा x उस भुजा पर सम्मुख शीर्ष से डाला गया लम्ब
या	1/2 दोनों समान्तर भुजाओं का योग x समा0 भुजाओं के मध्य की दूरी
कमरे के चारों दीवारों का क्षेत्रफल	= 2 (लम्बाई + चौड़ाई) x ऊँचाई
घन का सम्पूर्ण पृष्ठ अर्थात् घन के छः पृष्ठों का क्षेत्रफल	= 6 x भुजा^{2}

मूल्यांकन-

1. एक त्रिभुज का आधार 5 सेमी एवं ऊँचाई 15 मिमी है। त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
2. एक वर्ग की भुजा 1.5 मी है। वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
3. किसी आयताकार पार्क की लम्बाई 25 मीटर एवं चौड़ाई 18 मीटर है। पार्क के चारों तरफ 1.8 मीटर चौड़ी सड़क बनाई गई। सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
4. एक वर्गाकार मैदान की एक भुजा 28 मीटर लम्बी है। यदि मैदान के अन्दर चारों भुजाओं के साथ 2 मीटर चौड़ा स्थान वाहनों के लिये सुरक्षित छोड़ा गया है तो शेष मैदान का क्षेत्रफल बताइए।
5. एक आयत की लम्बाई 4 सेमी चौड़ाई 2 सेमी है, आयत का क्षेत्रफल है-

   (1) 8 वर्ग सेमी (2) 2 वर्ग सेमी (3) 6 वर्ग सेमी (4) इसमें से कोई नहीं
6. किसी कमरे की दीवार की लम्बाई तथा ऊँचाई क्रमशः 15 मीटर तथा 10 मीटर है, दीवार का क्षेत्रफल है-

   (1) 25 वर्ग मीटर (2) 150 वर्ग मीटर (3) 5 वर्ग मीटर (4) 1.5 वर्ग मीटर
7. एक समकोण त्रिभुज का आधार 6 मीटर तथा ऊँचाई 4 मीटर है, त्रिभुज का क्षेत्रफल है-

   (1) 12 वर्ग मीटर (2) 24 वर्ग मीटर (3) 100 वर्ग मीटर (4) 2 वर्ग मीटर

इकाई - 11

अवर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता बंटन तथा आँकड़ों का आयत चित्र द्वारा प्रदर्शन एवं निष्कर्ष निकालना

इस इकाई के अध्ययन से निम्नांकित की जानकारी होगी-

(1) अवर्गीकृत तथा वर्गीकरण आँकड़ों का बोध

(2) बारंबारता का ज्ञान

(3) आँकड़ों का आयत चित्र द्वारा प्रदर्शन का बोध तथा आयत चित्र से निष्कर्ष निकालने का ज्ञान

प्रशिक्षुओं को प्रतिदिन विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ समाचार पत्रों, पत्रिकाओं, टेलीविजन आदि के द्वारा मिलते हैं। किसी निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये गये इन सूचनाओं को आँकड़ें कहते हैं। मात्र आँकड़ों के संग्रह से हमें विशेष सूचना नहीं मिल सकती है। आँकड़ों का संग्रह करने के बाद आँकड़ों को व्यवस्थित करने की भी आवश्यकता होती है। अव्यवस्थित आँकड़ों से परिणाम निकालने के लिए इन आँकड़ों को व्यवस्थित करने की आवश्यकता पड़ती है। इन आँकड़ों को दो प्रकार से व्यवस्थित किया जाता है-

(1) आरोही क्रम - छोटे आँकड़ों से बड़े आँकड़ों की ओर जाना।

(2) अवरोही क्रम - बड़े आँकड़ों से छोटे आँकड़ों की ओर जाना।

उदाहरणार्थ निम्न आँकड़ों को आरोही और अवरोही क्रम में प्रशिक्षुओं से व्यवस्थित कराया गया।

36, 35, 30, 48, 42, 25, 10, 15, 52, 40, 65, 6, 8, 20

(1) आरोही क्रम - 6, 8, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 36, 40, 42, 48, 52, 65

(2) अवरोही क्रम - 65, 52, 48, 42, 40, 36, 35, 30, 25, 20, 15, 10, 8, 6

श्यामपट्ट पर निम्नांकित सारणी बनायें।

क्र0सं0	पसन्दीदा फल का नाम	खींची गई लकीरें	लकीरों की संख्या
1.	आम	||||||||||||||||	16
2.	सेब	||||||	6
3.	केला	|||||||||	9
4.	सन्तरा	||||||||	8

उपरोक्त सारणी में खींची गई लकीरें उक्त फल को पसन्द करने वाले लोगों की संख्या दर्शाती है। सारणी से स्पष्ट है कि आम को 16, सेब को 6, केला को 9 तथा सन्तरे को 8 लोगों द्वारा पसन्द किया गया। अतः हम कह सकते हैं कि आम की बारंबारता 16, सेब की 6, केला की 9 तथा सन्तरें की बारंबारता 8 है।

उपरोक्त सारणी को अवर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता सारणी कहते हैं।

अतः स्पष्ट है कि बारंबारता वह संख्या है जिससे यह पता चलता है कि आँकड़ों में कोई संख्या कितनी बार दोहराई गई है।

टैली चिन्ह-

उपरोक्त सारणी में खींची गई लकीरों की संख्या अधिक होने पर इनको बनाना व गिनना सरल नहीं होता है। इस कठिनाई को दूर करने के लिए इन्हें पाँच-पाँच समूह में रखते हैं। ऐसे एक समूह में चार खड़ी लकीरें को एक तिरछी लकीर इन चारों लकीरों को काटते हुए खींचते हैं। लकीरों की संख्या चार से अधिक होने पर पाँच संख्या के लिए चिन्ह ~~||||~~ का प्रयोग करते है। इसे टैली चिन्ह कहते हैं।

अवर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता सारणी-

किसी विद्यालय में कक्षा के 6 के 28 छात्रों के गणित प्रश्न-पत्र में प्राप्तांकों का विवरण निम्नवत् है-

22, 25, 14, 6, 11, 33, 42, 42, 25, 22, 22, 14, 6, 11, 15, 15, 22, 42, 14, 15

25, 22, 33, 32, 30, 14, 15, 15

उपरोक्त प्राप्तांकों को सारणीबद्ध कीजिए।

सारणी

<table>
<tr><th>क्र.सं.</th><th>प्राप्तांक</th><th>टैलीचिन्ह</th><th>छात्रों की संख्या
बारंबारता</th></tr>
<tr><td>1.</td><td>6</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>11</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>14</td><td>||||</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>15</td><td>𝍸</td><td>5</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>22</td><td>𝍸</td><td>5</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>25</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7.</td><td>30</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8.</td><td>32</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9.</td><td>33</td><td>||</td><td>2</td></tr>
<tr><td>10.</td><td>42</td><td>|||</td><td>3</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>28</td></tr>
</table>

इस प्रकार ऊपर दी गई सारणी को अवर्गीकृत आँकड़ों की बारंबारता बंटन सारणी अथवा बारंबारता सारणी कहते हैं।

आँकड़ों का वर्गीकरण-

प्रशिक्षुओं से परीक्षाफल के सन्दर्भ में निम्नलिखित प्रश्नों पर परिचर्चा कीजिए-

(1) 100 अंकों में प्रथम, द्वितीय, तृतीय व अनुत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थी के अंकों की सीमा कितने से कितने अंकों तक है ?

(2) परीक्षाफल को विभिन्न श्रेणियों में विभाजित करने से परीक्षा की व्याख्या करने में क्या सुविधा होती है ?

उपर्युक्त के सम्बन्ध में निम्न प्रकार की सारणी बनाई जा सकती है।

श्रेणी	प्राप्तांक का अन्तराल
प्रथम	60 - 100
द्वितीय	45 - 59
तृतीय	33 - 44
अनुत्तीर्ण	0 - 32

उपरोक्त सारणी के आधार पर आँकड़ों को 0 - 10, 10 - 20, 20- 30, 30 - 40, 40 - 50, 50 - 60, 60 - 70, 70 - 80, 80 - 90, 90 - 100 के वर्गों में विभाजित करायें। इन वर्गों में 10 को 0 - 10 वर्ग में न रखकर वर्ग 10 - 20 में रखते हैं। प्रशिक्षुओं को यह भी बताएँ कि वर्ग 0 - 10 में 0 इस वर्ग की निम्न सीमा तथा 10 इसकी उच्च सीमा है और दोनों सीमाओं का अन्तर इस वर्ग का आकार, वर्गान्तर, वर्ग-अन्तराल या वर्ग विस्तार या माप कहलाता है। वर्ग बनाते समय इस बात का ध्यान रखिए कि वर्ग एक दूसरे को अतिक्रमित न करते हों। जैसे उपर्युक्त में वर्ग 0 - 10, 10 - 20, 20 - 30 आदि बनाये जाते हैं। यह वर्ग 0 - 10, 8 - 18, 20 - 24 आदि नहीं हो सकते हैं।

प्रयास कीजिए-

1. निम्नलिखित बारंबारता बंटन सारणी का अध्ययन कीजिए और उसके नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए-

वर्ग अन्तराल (रूपयों में दैनिक आय)	बारंबारता (श्रमिकों की संख्या)
100 - 125	46
125 - 150	23
150 - 175	54
175 - 200	130
200 - 225	125
225 - 250	110
250 - 275	90
275 - 300	65
300 - 325	23

(i) वर्ग अन्तराल की माप क्या है ?

(ii) किस वर्ग की बारंबारता सबसे अधिक है ?

(iii) किस वर्ग की बारंबारता सबसे कम है ?

(iv) वर्ग अन्तराल 300 - 325 की उच्च सीमा व निम्न सीमा क्या है ?

(v) किन दो वर्गों की बारंबारता समान है।

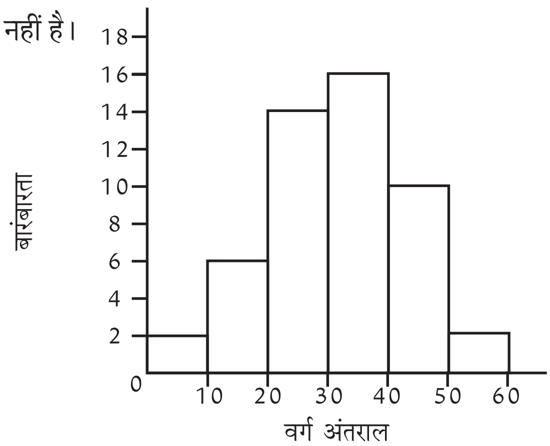
आयत-चित्र-

इसके पूर्व प्रशिक्षु दण्ड आरेख, बार ग्राफ के माध्यम से अवर्गीकृत आँकड़ों के ग्राफ बनाने तथा उनसे निष्कर्ष निकालने की प्रक्रिया से परिचित हो चुके हैं। किन्तु अब यदि आँकड़ें वर्गीकृत हैं और बारंबारता दिया गया हो तो उनका निरूपण भी ग्राफ द्वारा किया जा सकता है। वर्गीकृत आँकड़ों के निरूपण को आयत-चित्र कहते हैं। आयत चित्र में x-अक्ष पर वर्ग-अन्तराल को आधार मानकर आयत खींचे जाते हैं। आयतों की चौड़ाई वर्गान्तर के तथा ऊँचाई सम्बन्धित वर्ग के बारंबारता के समानुपाती होती है। आइये अब आयत चित्र के निरूपण पर विचार करें।

आयत चित्र बनवायें

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारंबारता	2	6	14	16	10	2

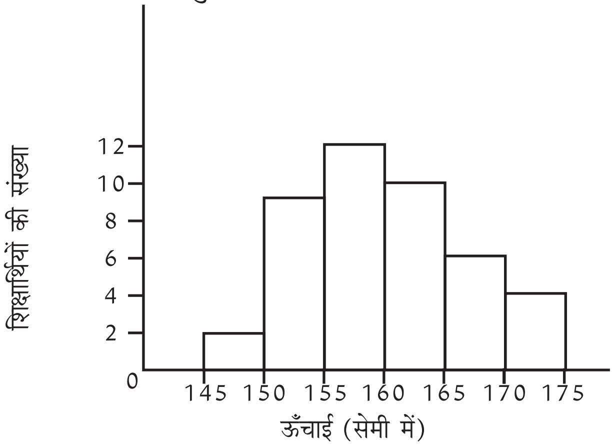
यहाँ पर क्षैतिज अक्ष पर वर्ग अन्तरालों को निरूपित करें। दंड की लम्बाई वर्ग अन्तराल की बारंबारता दर्शाती है। साथ ही, दंडों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है, क्योंकि वर्ग अन्तरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।



आँकड़ों के इस प्रकार के आलेखीय निरूपण को एक आयत चित्र कहते है।

आयत चित्र से निष्कर्ष निकालना-

निम्न आयत चित्र को दिखाकर प्रशिक्षुओं से निष्कर्ष निकलवायें।



(1) सबसे अधिक शिक्षार्थी किस ऊँचाई वर्ग में है ?

(2) 160-165 सेमी की ऊँचाई के शिक्षार्थियों की संख्या कितना है ?

(3) सबसे कम शिक्षार्थी किस ऊँचाई वर्ग में है ?

उपरोक्त आयत चित्र से प्रश्नों का हल होगा-

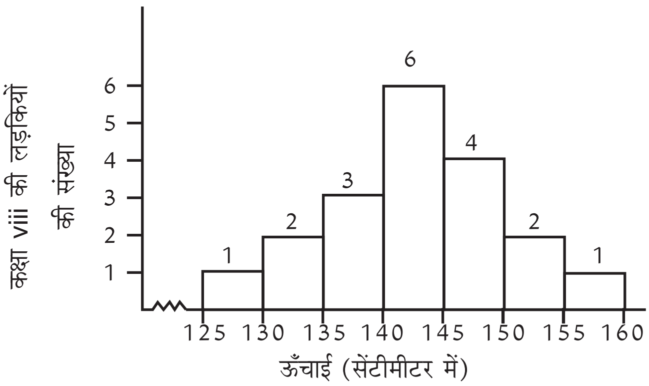
(1) सबसे अधिक शिक्षार्थी 155-160 ऊँचाई वर्ग में है।

(2) 160-165 सेमी की ऊँचाई के शिक्षार्थियों की संख्या 10 है।

(3) सबसे कम शिक्षार्थी 145-150 ऊँचाई वर्ग में है।

प्रयास कीजिए-

निम्नलिखित आयत चित्र को देखकर उसके नीचे दिए हुए प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



(i) इस आयतचित्र द्वारा क्या सूचना दी जा रही है

(ii) किस वर्ग में अधिकतम लड़कियाँ है ?

(iii) कितनी लड़कियों की लम्बाई 145 सेमी या उससे अधिक है ?

मूल्यांकन-

(1) निम्नलिखित संख्याओं के 5-5 के वर्ग विस्तार पर वर्ग बनाइए-

5, 11, 26, 23, 19, 10, 8, 7, 6, 10, 24, 20, 18, 15, 17, 21, 40, 12, 14, 18, 23, 37, 43, 36, 42, 17, 21, 24, 20, 37

(2) नीच दी गई तालिका को देखकर प्रश्नों के उत्तर दीजिए-

क्रम संख्या	वर्ग	टैली चिन्ह	बारम्बारता
1.	5-10	𝍸 𝍸	10
2.	10-15	|||	3
3.	15-20	𝍸 𝍸 |||	13
4.	20-25	𝍸 𝍸 𝍸 ||	17
5.	25-30	𝍸 𝍸 ||	12
6.	30-35	||||	4
7.	35-40	𝍸 𝍸 |	11

(i) वर्ग 25-30 में निम्न सीमा व उच्च सीमा क्या है ?

(ii) वर्ग 35-40 में वर्ग अन्तराल कितना है ?

(ii) वर्ग 20-25 में कितनी टैली लगी है ?

(iv) किस वर्ग की बारम्बारता 13 है ?

(v) किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है ?

(vi) संख्या 20 को वर्ग 15-20 या 20-25 में से किस वर्ग में रखा जायेगा ?

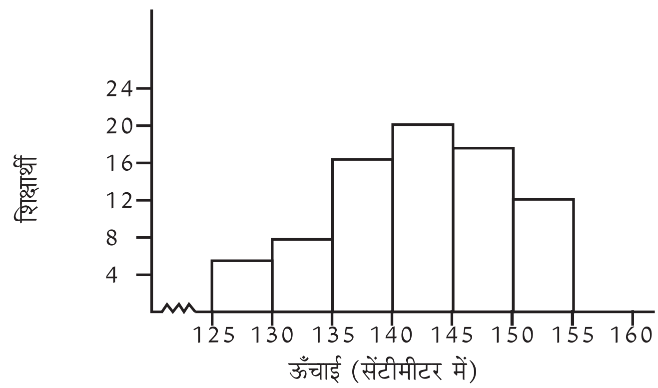
(3) निम्नलिखित बारम्बारता बंटन सारणी में 60 शिक्षार्थियों के प्राप्तांक दिये गये है-

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
बारम्बारता	2	3	6	6	12	13	12	4

(4) नीचे दिय बारम्बारता बंटनका आयत चित्रों द्वारा प्रदर्शन कीजिए-

माप	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
बारम्बारता	2	8	15	20	16	6

(5) निम्नलिखित आयत चित्र को देखकर प्रश्नों का उत्तर दीजिए-



(i) सबसे कम बारम्बारता किस वर्ग-अन्तराल की है ?

(ii) 140 सेमी से कम ऊँचाई के कितने शिक्षार्थी है ?

(iii) 145-150 व 150-155 वर्ग-अन्तराल में शिक्षार्थियों की संख्या कितनी है ?

(6) वर्ग-अन्तराल 150-200 की उच्च सीमा है-

(1) 150 (2) 200 (3) 350 (4) 50

(7) वर्ग-अन्तराल 50-75 की माप है-

(1) 50 (2) 75 (3) 25 (4) 125

(8) आँकड़े 2, 5, 4, 5, 3, 7, 5 में 5 की बारम्बारता है-

(1) 3 (2) 2 (3) 4 (4) 5

(9) आँकड़े 4, 2, 5, 1, 6, 7 का आरोही क्रम है-

(1) 1, 2, 4, 5, 6, 7 (2) 1, 2, 5, 4, 6, 7 (3) 1, 2, 4, 6, 5, 7 (4) 7, 6, 5, 4, 2, 1

(10) किसी गणित विषय में एक छात्र को 27 अंक प्राप्त हुआ है। इसका टैली चित्र है-

(1) 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 || (2) 𝍸 𝍸 𝍸 |

(3) 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 || (4) 𝍸 𝍸 𝍸 𝍸 |||||

इकाई - 12

सर्वांगमता तथा समरूपता

इस इकाई के अध्ययन से निम्नांकित की जानकारी होगी-

(1) सर्वांगसमता का ज्ञान

(2) समरूपता का ज्ञान

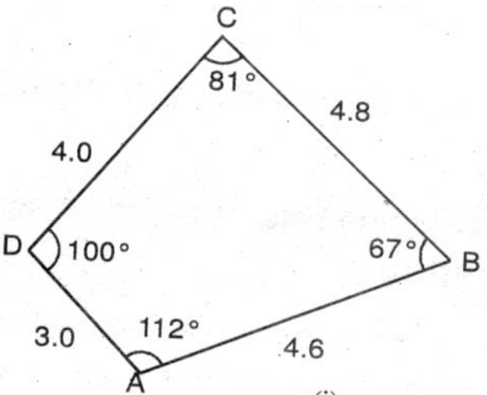
किसी निश्चित वर्ष के 2 रूपये के सिक्कों को लेकर यदि उनको एक दूसरे के ऊपर रखा जाये तो वे एक दूसरे को पूर्णंतः ढँक लेते हैं। यह सिक्के आपस में सर्वागसम हैं। गुलाबी रंग के कागज पर 5 इंच रेखा भुजा का एक वर्ग तथा हरे रंग के कागज पर 5 इंच भुजा का दूसरा वर्ग बनाकर वर्गों को काटकर कागज से अलग करने के पश्चात् यदि इन दोनों वर्गों को एक दूसरे के ऊपर रखा जाये तो दोनों वर्ग एक दूसरे को पूर्णतः ढँक लेते हैं। ये वर्ग आपस में सर्वागसम हैं।

जब दो आकृतियाँ एक दूसरे को पूर्णतः ढँक लेती है, तो उन आकृतियों को सर्वांगसम कहते हैं।

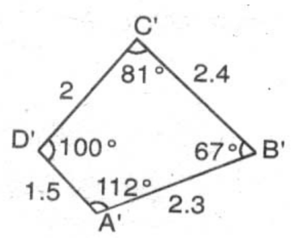
इस प्रकार दो सर्वांगसम आकृतियाँ समान आकृति (shape) तथा समान माप (size) की होती हैं। वे आकृतियाँ जो समान रूप (shape) की तो होती हैं किन्तु समान आकार (size) की नहीं होती है उन्हें क्या कहा जाता है ?

यदि किसी व्यक्ति की किसी एक खास फोटो की तीन-चार प्रतियाँ जो कि विभिन्न मापों की हो बनवाई जायें तो ये फोटो के चित्र समरूप कहलायेंगे। बड़े और छोटे फोटो चित्रों की संगत भुजाओं में अनुपात समान होगा।

निम्नांकित चतुर्भुज ABCD और A'B'C'D' की संगत भुजाओं और संगत कोणों पर विचार करेंगें।



(i)



(ii)

(1) संगत भुजायें $\frac{DC}{D'C'} = \frac{4}{2} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{3}{1.5} = \frac{BA}{B'A'} = \frac{4.6}{2.3}$

$\frac{CB}{C'B'} = \frac{4.8}{2.4} = 2$

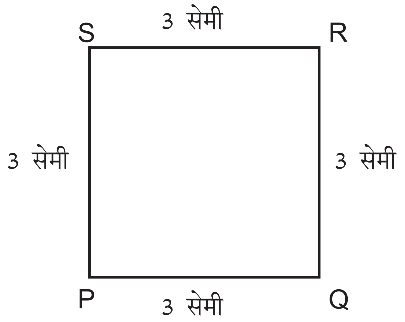
(2) $\angle D = \angle D' = 100^0$, $\angle C = \angle C' = 81^0$

$\angle A = \angle A' = 112^0$, एवं $\angle B = \angle B' = 67^0$

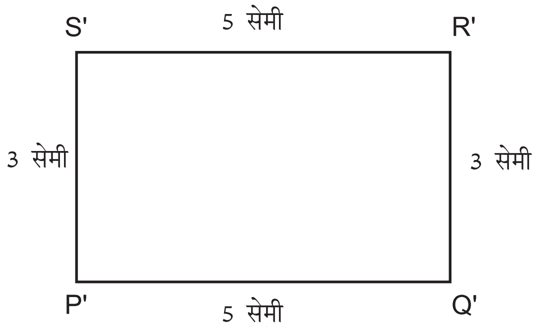
उपर्युक्त चित्र (i) एवं (ii) की संगत भुजाओं का अनुपात एक समान (यहाँ पर अनुपात 2 है) तथा संगत कोण भी एक समान है।

ये आकृतियाँ समरूप है।

अब निम्नलिखित, दो आकृतियाँ जो कि एक वर्ग और दूसरी आयत है पर ध्यान दीजिए। इनके संगत कोण बराबर है। परन्तु उनकी संगत भुजाएँ समान अनुपात में नहीं है। अतः दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।

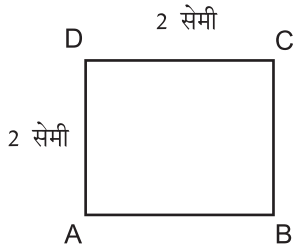


(i)

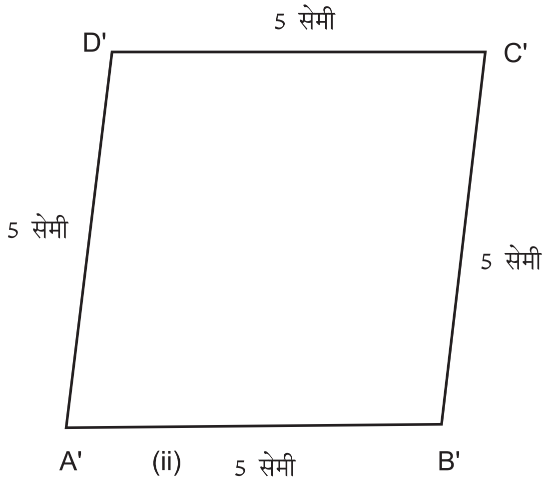


(ii)

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि वर्ग और समचतुर्भुज की संगत भुजाएँ समान अनुपात में है परन्तु उनके संगत कोण बराबर नहीं है। अतः दोनों आकृतियाँ समरूप नहीं है।



(i)

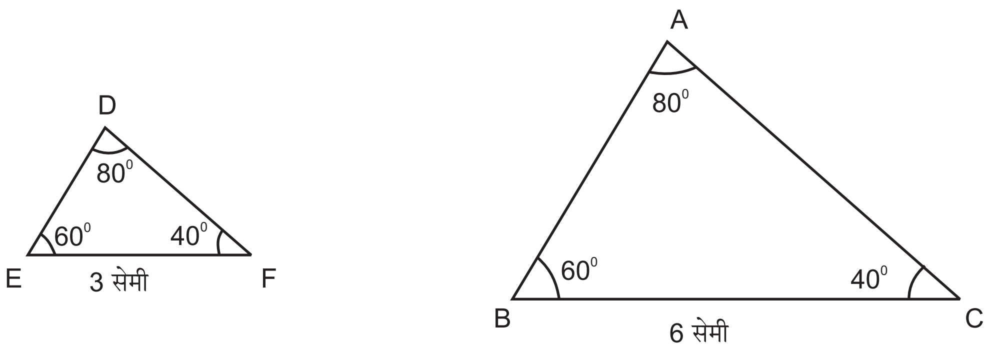


(ii)

ऐसी आकृतियों को जो रूप में समान हों, परन्तु उनके आकार भिन्न हों, समरूप आकृतियाँ कहते हैं।

समरूप त्रिभुज-

दो त्रिभुज DEF तथा त्रिभुज ABC अलग-अलग माप (भुजाओं की माप अलग-अलग के इस प्रकार बनाये जाये कि उनके कोणों की माप समान हों, जैसा कि निम्नांकित चित्र में दिखाया गया है।



यहाँ $\frac{EF}{BC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ है।

इसी प्रकार $\frac{DF}{AB}$ एवं $\frac{DF}{AC}$ का मान भी $\frac{1}{2}$ प्राप्त होता है।

समान कोणिक त्रिभुजों की किन्हीं दो संगत भुजाओं का अनुपात सदैव समान होता है। चाहे उनके माप कुछ भी हो।

क्रियाकलाप-

एक ΔABC जिसमें AC = 2 सेमी, BC = 3सेमी एवं CA = 4सेमी हो एवं दूसरा ΔDEF जिसमें DE = 4 सेमी, EF = 6 सेमी तथा FD = 8 सेमी हो की रचना करने के पश्चात् यदि कोणों को नापा जाये तो संगत कोण बराबर होते हैं। यहाँ $\frac{AB}{DE} = \frac{2}{4} = \frac{BC}{EF} = \frac{3}{6} = \frac{CA}{FD} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

अर्थात् दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान है।

अतः यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाओं का अनुपात समान हो तो उनके संगत कोण भी समान होते हैं।

दो त्रिभुज समरूप होते हैं जब उनके संगत कोण बराबर होते हैं। समरूप त्रिभुजों में संगत भुजाओं का अनुपात समान होता है।

क्रियाकलाप-

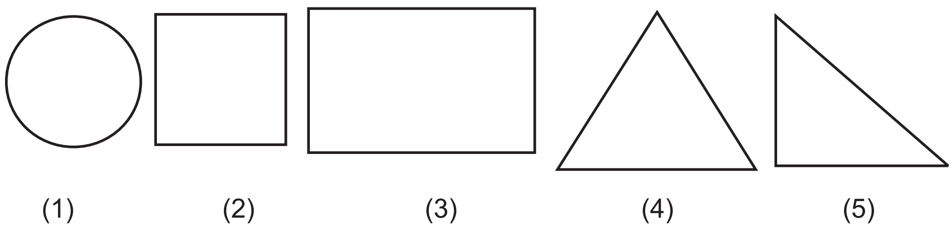
शिक्षक प्रशिक्षुओं से निम्नांकित क्रियाकलाप करने को कहें :

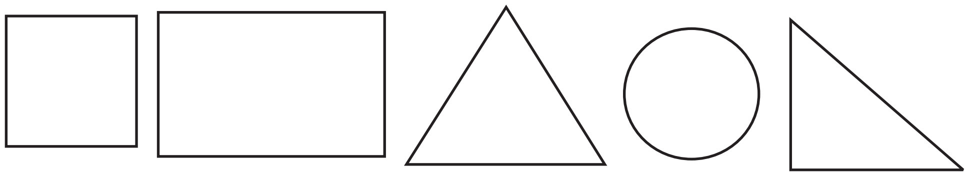
पुराना ग्रीटिंग कार्ड या चार्ट पेपर लेकर उस पर 8 सेमी की एक रेखा खिचवायें। रेखा के एक अन्त्य बिन्दु पर 50° तथा दूसरे अन्त्य बिन्दु पर 65° का कोण चाँदे से बनवायें। इस प्रकार एक त्रिभुज की रचना होगी इसे काटकर अलग करवायें। पुनः 10 सेमी की रेखा खिंचवायें तथा इसी प्रक्रिया को दोहरायें तथा त्रिभुज को काटकर अलग करवायें। ये समरूप त्रिभुज हैं। क्यों ? शिक्षक प्रशिक्षुओं को समझायें। अब संगत भुजाओं का अनुपात ज्ञात करने को कहें। क्या यह समान है ?

इसी प्रकार दो अन्य त्रिभुज बनवायें। इस बार कोण अन्य नापों के होने चाहिए।

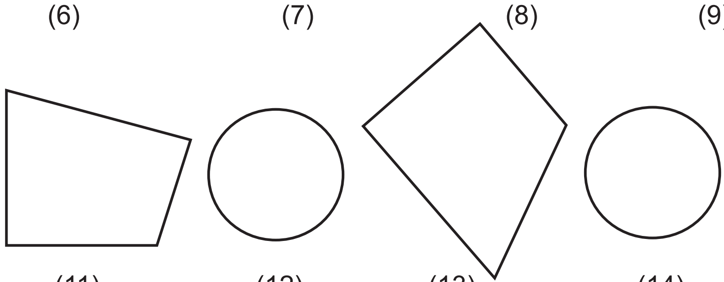
मूल्यांकन-

1. एक त्रिभुज ABC की भुजाओं की माप AB = 3 सेमी, BC = 5 सेमी तथा CA = 4 सेमी है तथा दूसरे त्रिभुज PQR में भुजाओं की माप PQ = 7 सेमी, PR = 6 सेमी तथा QR = 5 सेमी है। क्या ये दोनों त्रिभुज समरूप है या नहीं ? उत्तर कारण सहित बताइए।
2. Δ ABC में $\angle A = 65^{0}$ तथा $\angle C = 40^{0}$ है। PQR त्रिभुज ABC के समरूप है। यदि $\angle Q = 65^{0}$ हो तो PQR के अन्य दो कोणों के मान बताइए।
3. कुछ आकृतियों के क्रमांक दिये गये हैं। सर्वांगसम आकृतियों के क्रमांक छाँटकर एक साथ लिखिए :



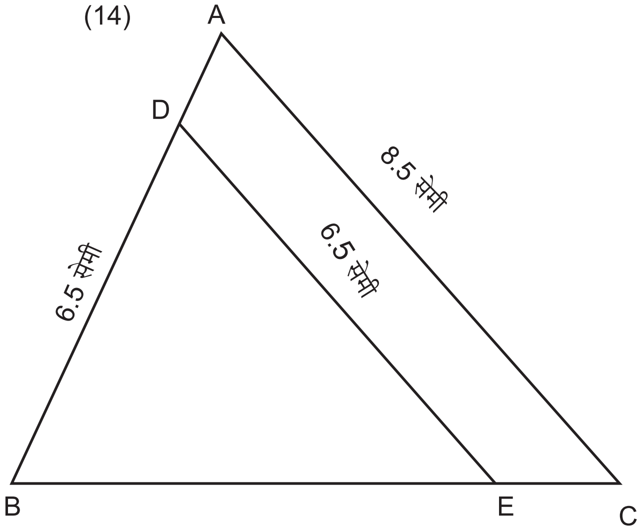


(6) (7) (8) (9) (10)



(11) (12) (13) (14)

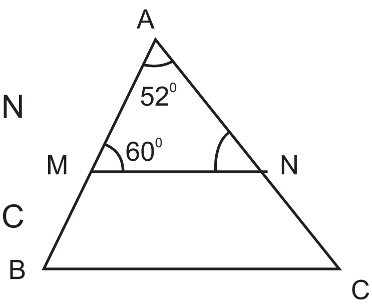
4. ABC एक त्रिभुज है। इस त्रिभुज के अन्दर DBE इस प्रकार है कि भुजा AC और DE आपस में समान्तर है। AD का मान ज्ञात कीजिए जबकि DB की माप 6.2 सेमी है।



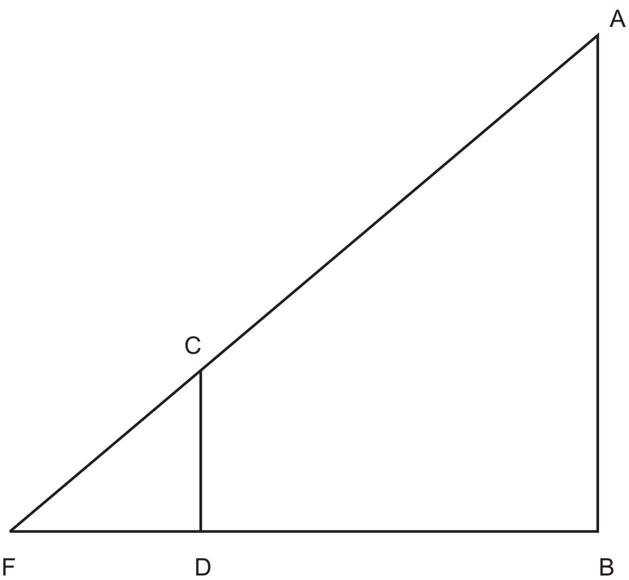
5. सम्मुख आकृति में Δ ABC में MN और BC समान्तर है :

(i) Δ ABC के शेष कोणों की माप बताइए। क्या त्रिभुज ABC और त्रिभुज AMN समरूप है ?

(ii) यदि M तथा N क्रमशः BC और AC भुजाओं के मध्य बिन्दु हो, तो भुजा BC और MN का अनुपात ज्ञात कीजिए।



6. सम्मुख चित्र में AB खम्भा है, खम्भे के धरातल में CD छड़ को इस प्रकार गाड़ा गया है कि खम्भे की परछाई को छड़ की परछाई ने पूर्णतः ढँक लिया है। (अर्थात यदि खम्भे की परछाई ठीक F बिन्दु तक पहुँच रही है तो छड़ की परछाई भी ठीक F बिन्दु एक पहुँच रही है। यदि FB = 10 मीटर तथा FD = 3 मीटर एवं छड़ CD की लम्बाई 2.07 मी हो तो खम्भे की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

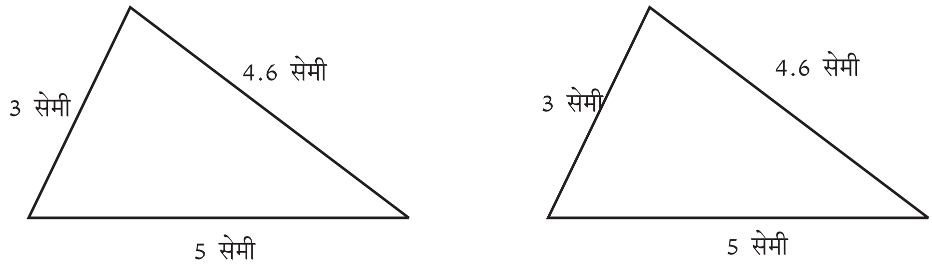


इकाई - 13

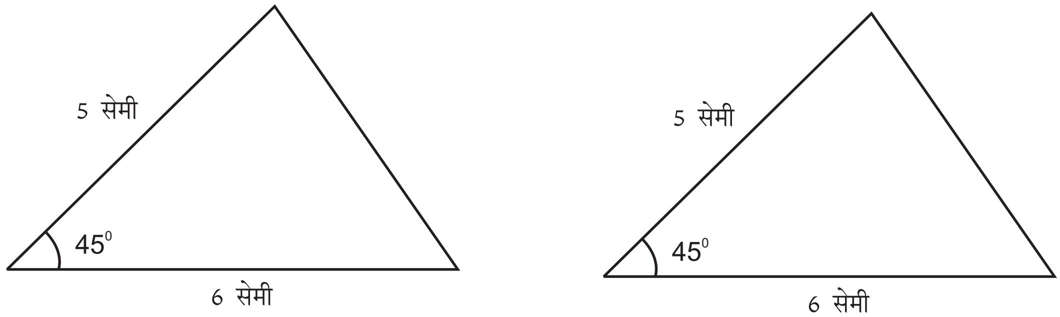
त्रिभुज के संदर्भ में सर्वांगसमता की शर्तें

सर्वागसमता के बारे में पूर्व के अध्याय में बताया जा चुका है। इस अध्याय में दो त्रिभुज कब सर्वांगसम होते हैं इसका ज्ञान प्राप्त करेंगे।

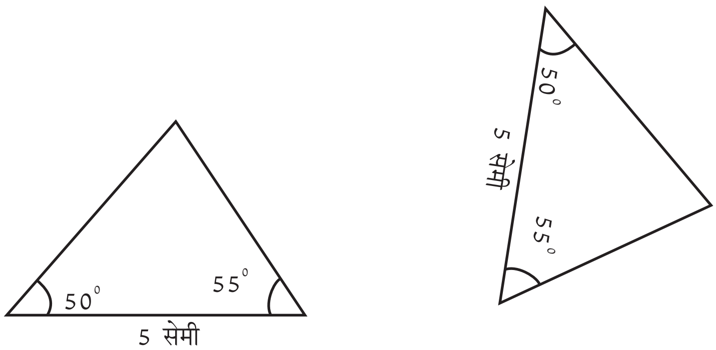
1. दो त्रिभुज सर्वांगमस होते हैं यदि दोनो त्रिभुजों की तीनों भुजायें अलग-अलग बराबर हों। अर्थात् एक त्रिभुज की तीनों भुजायें दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं के बराबर हो।



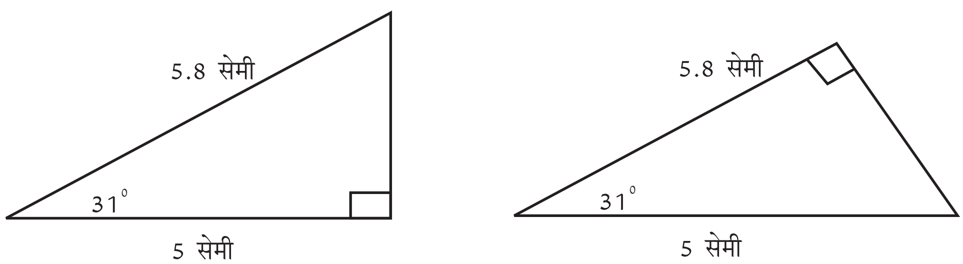
2. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं, यदि एक त्रिभुज की दो भुजाओं एवं उनके बीच का कोण तथा दूसरे त्रिभुज की दो भुजाओं और उनके बीच का कोण अलग-अलग बराबर हों।



3. दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक त्रिभुज के दो कोण एवं संलग्न भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण एवं संगत भुजा अलग-अलग बराबर हो।

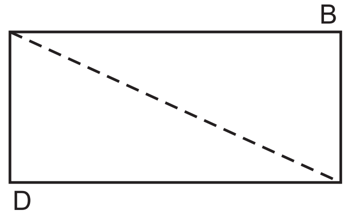


4. दो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण के बराबर हो तथा पहले त्रिभुज की एक अन्य भुजा दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा के बराबर हो।



शिक्षक प्रशुक्षियों से निम्नांकित क्रियाकलाप करावायें-

1. विभिन्न मापों की लम्बाई एवं चौड़ाई के आयतों को निर्माण गत्ते, अनुपयोगी ग्रीटिंग कार्ड या चार्ट पेपर से करवाये। पुनः विकर्ण से उनके दो भागों में विभाजित करवाये।

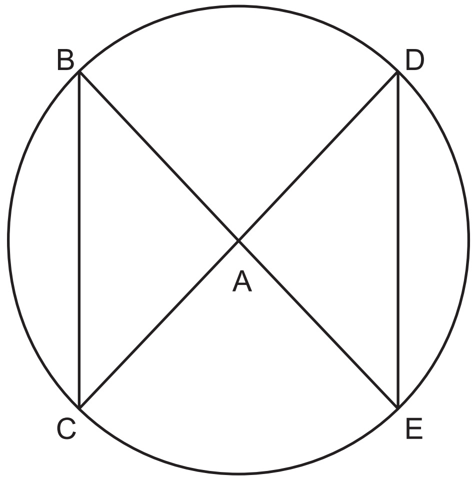


दोनों भागों को एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार रखवायें ताकि बिन्दु B बिन्दु D पर हो तथा लम्बी भुजा पर लम्बी भुजा पड़े।

क्या दोनों त्रिभुज एक दूसरे को पूर्णतः ढक लेते है। दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं ? प्रशिक्षु तर्क द्वारा बतायें। प्रशिक्षु यह भी बतायें कि यहाँ सर्वांगसमता में किन-किन नियमों का पालन हो रहा है।

2. इसी प्रकार वर्ग, समान्तर चतुर्भुज तथा समचतुर्भुज बनवाकर उपर्युक्त क्रियाकलाप प्रशिक्षुओं द्वारा करवायी जाये।

3. विभिन्न त्रिज्याओं की माप से वृत्ताकार चकतियाँ कटवाकर चित्रानुसार त्रिभुजों ABC तथा ADE को कटवाकर त्रिभुजों की सर्वांगसमता की पुष्टि करवायें। प्रशिक्षु बताये कि यहाँ सर्वांगसमता के किस नियम का पालन हो रहा है। (चित्र में A वृत्ताकार चकती का केन्द्र है)



मूल्यांकन-

1. दो त्रिभुज आपस में सर्वांगसम है यदि एक त्रिभुज में दो कोणों के मान 38° एवं 57° हैं तथ इन कोणों की संलग्न भुजा 7.2 सेमी है, यदि दूसरे त्रिभुज के दो कोणों का मान 57° एवं 38° है तो इन कोणों को संलग्न भुजा का मान ज्ञात कीजिए।

2. त्रिभुज ABC तथा PQR समकोण त्रिभुज हैं जिसमें $\angle A$ तथा $\angle Q$ समकोण हैं। यदि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं तथा भुजा BC और भुजा PR आपस में बराबर है। यदि भुजा AB = 5 सेमी तो भुजा QR की माप ज्ञात कीजिए।